Estructuras aritméticas elementales y su modelización

Encarnación Castro
Luis Rico
Enrique Castro

una empresa docente

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Bogotá, 1995

Primera edición, julio de 1995

ESTRUCTURAS ARITMÉTICAS ELEMENTALES Y SU MODELIZACIÓN
Autores: Encarnación Castro, Luis Rico y Enrique Castro

D. R. © 1995 una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de "una empresa docente", del Grupo Editorial Iberoamérica y de los autores.

Diseño carátula: una empresa docente®

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Serapio Rendón 125. Col. San Rafael, 06470 México, D.F.
Apartado 5-192, C.P. 06500 Tel. 705-05-85
Reg. CNIEM 1382

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 284-1890
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

ISBN
Impreso en México / *Printed in Mexico*

Contenido

1
Adquisición del concepto de número

INTRODUCCIÓN

Cuando al hablar se dice "tres", o cualquier otra palabra numérica parece que nos estamos refiriendo a una cuestión muy sencilla (quizá sea por la costumbre que tenemos de utilizarla), sin embargo un análisis cuidadoso de la cuestión nos hace ver que la expresión "tres" o cualquiera otra expresión numérica encierran múltiples conceptos algunos de ellos complejos debido en parte a los distintos contextos en los que se utilizan los números.

Vamos a tratar los distintos contextos numéricos y los procesos que siguen los niños en la adquisición de cada uno de ellos hasta llegar al concepto de número, en este tratamiento partimos de los siguientes supuestos:

Consideramos el aprendizaje del número como una base de aprendizaje informal, sobre el que se van a apoyar los conceptos de Aritmética formal que posteriormente el niño va a desarrollar.

Estamos de acuerdo con Baroody cuando asegura que el aprendizaje informal es la base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se estudian en la escuela, ya que los niños tienden a abordar la matemática formal en función de la matemática informal que conocen.

Creemos que la etapa infantil es de enorme trascendencia para la educación matemática posterior del niño. En ella se van a formar los conceptos básicos o primarios y los primeros esquemas sobre los que, posteriormente, se construirá todo el aprendizaje. Si estos esquemas básicos están mal formados o son frágiles, pueden llegar a impedir o a dificultar (en el mejor de los casos) el aprendizaje posterior.

En la escuela infantil, el niño ha de ser encauzado para que evolucione hacia procesos más abstractos de pensamiento. Está demostrado que, desde pequeños, los niños son capaces de desarrollar métodos, a veces sofisticados, de contar y de resolver problemas sencillos.

Cerramos este apartado con la siguiente cita de Montessori (1934). "Se ha repetido siempre que la Aritmética y en general la ciencia matemática, tiene en la educación el oficio importante de ordenar la mente juvenil, preparándola, con rigurosa disciplina, para ascender a las alturas de la abstracción". Mas adelante añade: "El cálculo, después, no es sino una ulterior abreviación de la operación de contar".

CONTEXTOS NUMÉRICOS

Las palabras numéricas se utilizan en distintos usos y contextos así:

- Uso en la secuencia convencional numérica
- Empleo de dicha secuencia para contar
- Asociación de cada palabra con un símbolo
- Utilización para indicar la numerosidad de un conjunto
- Utilidad para indicar la posición relativa de los objetos
- Función de código
- En contexto de medida

Según el uso, o el contexto, en el que se utilicen las palabras numéricas, tendrán un significado distinto.

La secuencia. En un contexto de secuencia se emplean los números en su orden habitual (uno, dos, tres, cuatro,...) sin referirlos a ningún ente u objeto externo. Se suelen emplear las secuencias numéricas para conseguir distintos propósitos, como pueden ser los de practicarla, cronometrar el tiempo (por ejemplo, diciendo los números hasta 30 en el juego del escondite), atraer la atención de los demás, sugerir otros contextos numéricos (hallar el cardinal, el ordinal y la medida) y efectuar operaciones (sumar, restar, multiplicar y dividir).

El recuento. En el contexto de contar, a diferencia del de secuencia, cada número se asocia con un elemento de un conjunto de objetos discretos. En la vida real ambos contextos están identificados con el contar. Más, para nuestras consideraciones importa resaltar esta diferencia, puesto que el contexto de contar conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto. En objetos que no estén fijados a una posición, la acción de indicar se puede sustituir por trasladar al objeto que se cuenta del montón de los no contados al de los contados.

Contexto cardinal

Un contexto cardinal es aquel en el que un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos (aislados) o sucesos.

Nuestro idioma, como muchos otros, dispone de palabras especiales para indicar los cardinales en determinadas situaciones: duo, trío, cuarteto, etc. (en música); gemelos, trillizos, cuatrillizos, etc.; doble, triple, cuádruple, etc.; par, terna, cuaterna, etc.

Para hallar el cardinal de un conjunto se puede proceder de distintas formas. La primera es preguntar a alguien para que nos lo diga. En caso de que esta vía no sea posible o necesaria, nos vemos obligados a determinarlo por nosotros mismos, y dependiendo del tamaño del conjunto actuamos de cuatro formas distintas.

- Si el tamaño se puede percibir "de una ojeada" (caso de los puntos del dominó) el número aparece en nuestra mente de forma instantánea. Esta forma de obtenerlo se llama **subitización**, derivado de la palabra latina **subitus** (súbito)
- Para conjuntos más numerosos en los que nos falla la subitización empleamos el proceso de contar; el número con el que finalizamos el proceso de contar un conjunto determinado nos da su cardinal

- En los casos en que la aproximación numérica es suficiente se suelen emplear técnicas de estimación (número de asistentes a una manifestación)
- Y finalmente, si disponemos de la suficiente información adicional, el cardinal de un conjunto también podrá hallarse empleando con sentido las cuatro operaciones elementales y sus propiedades (así, conocidos los cardinales de una partición de un conjunto, podemos hallar por suma el cardinal de éste)

Hay situaciones en que sólo se necesita conocer el "tamaño" de un conjunto, y otras en las que comparamos los de dos conjuntos. Se trata en este caso de decidir si los "tamaños" son iguales, o si uno es mayor o menor que otro. La decisión se puede tomar:

- Comparando perceptualmente los conjuntos
- Estableciendo correspondencias biunívocas entre los elementos de los dos conjuntos
- Y contando los objetos y comparando los cardinales

Contexto de medida

En los contextos de medida los números describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua como longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, tiempo, etc. La magnitud se supone dividida en múltiplos de la unidad correspondiente y nos permite responder a la pregunta ¿Cuántas unidades hay?. La división puede estar ya hecha o no, por lo que las técnicas que usemos para determinar la medida estarán subordinadas a este hecho. Si la magnitud está dividida en múltiplos de la unidad la situación es análoga a un contexto cardinal y podemos utilizar las mismas estrategias. Si no lo está, se requieren técnicas más complejas, específicas del tipo de magnitud. El proceso de división puede requerir llenar la unidad (por ejemplo, en capacidad) o recubrir la cantidad que va a ser medida con unidades (por ejemplo, un área con el centímetro cuadrado) y además contar. Si solo tenemos una réplica de la unidad (por ejemplo un solo centímetro cuadrado) estos procedimientos de recubrir se tienen que sustituir por una reiteración de la unidad en la que, al mismo tiempo que la unidad se coloca correctamente, se tiene que ir contando.

Se supone que, en un principio, el niño va aprendiendo estos términos numéricos como palabras que están asociadas a varios contextos distintos. Poco a poco, estos significados diferentes del término se van fusionando y darán lugar a un bloque, conformado por los distintos significados de la palabra. Este proceso le llevará a un niño, medio, cinco o seis años de su vida.

Parece que no hay duda de que es durante el período de la **educación infantil** cuando se va desarrollando lentamente la noción de número y la escuela tiene influencia sobre los niños durante este período, por lo que los profesionales de la enseñanza han de estar preparados para ayudar a sus alumnos en este aprendizaje de manera que se lleve a cabo de forma significativa.

Muchas investigaciones se han realizado sobre la noción de número y la forma en que los niños llegan a adquirir dicha noción. Los resultados de las mismas constituyen una valiosa aportación para la formación de los profesores, que las pueden tomar de guía y conseguir así un mejor desarrollo en el aprendizaje de sus alumnos.

SECUENCIA NUMÉRICA

Fuson y Hall (1980) establecen que de las primeras experiencias que los niños tienen con los números está la que surge del contacto con los términos o palabras numéricas. Se trata de la sucesión convencional: uno, dos, tres... como palabras que en un primer momento no tiene por qué ser utilizadas para contar.

Alrededor de los 6 o 7 años, el niño debe de dominar la sucesión hasta 100, correctamente, y lo conseguirá incorporando distintos tramos de la sucesión convencional. Alrededor de los cuatro años domina un primer tramo "uno, dos, tres, cuatro cinco" y tiene un segundo tramo de forma no convencional estable "cinco, ocho, nueve, doce" (por ejemplo) y un tercer tramo no convencional de forma no estable.

Para lograr el dominio de la secuencia el niño recorre cinco niveles:

Nivel Cuerda. La sucesión empieza en uno y los términos no están diferenciados.

Nivel Cadena Irrompible. La sucesión comienza en uno y los términos están diferenciados.

Nivel Cadena Rompible. La sucesión puede comenzar en un termino cualquiera.

Nivel Cadena Numerable. Contar n términos desde a hasta b.

Nivel Cadena Bidimensional. Desde un termino cualquiera, a, se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones.

Una vez alcanzado este nivel (en un tramo de la secuencia) es posible obtener relaciones entre estos números tales como: "después del número a viene el b"; "delante del número c está el d"; "antes de", "después de". El dominio de la secuencia permitirá utilizar el número en los demás contextos.

ASPECTO CARDINAL DEL NÚMERO

El número tiene un contexto cardinal cuando se está indicando con él, la cantidad de elementos que tiene un conjunto. Los niños toman pronto contacto con el cardinal del número. Para el termino **dos**, por ejemplo, como muy tarde, cuando cumple dos años y se le indica con dos dedos mientras se le repite "dos años"; no obstante tendrá experiencias diferentes asociadas con el número **dos** en su contexto cardinal, cada una de ellas le aportará un significado distinto que posteriormente reunidos darán lugar a un concepto de **dos** más general.

Se considera un momento importante en el desarrollo del concepto de número aquel en que el niño descubre la cardinalidad: El último número que dice al contar un conjunto de objetos es el cardinal de ese conjunto. Se admite que un niño ha adquirido la regla de la cardinación cuando es capaz de realizar uno de estos comportamientos.

- Responder inmediatamente a la pregunta ¿Cuántos hay?
- Enfatizar la ultima palabra al contar los elementos de un conjunto
- Repetir el último término al realizar un recuento

Se supone que un niño no ha adquirido la regla, si comienza, a contar de nuevo cuando se le pregunta ¿Cuantos hay? La mayoría de los niños, de desarrollo normal, son capaces de aplicar la regla de la cardinalidad a la edad de 4 años. Se reconocen tres fases en la consolidación de la regla de cardinación.

- Transición de contar a cardinal, en donde el ultimo término contado se convierte en el adecuado para el cardinal
- Comprensión de que el cardinal puede estar asociado a un recuento
- Integración de ambos significados: cada término obtenido al contar lleva simultáneamente un sentido de cardinación

EL PROCESO DE CONTAR

Contar consiste en asignar cada uno de los nombres de los términos de la secuencia a un objeto de un conjunto. Se establece, en un principio un apareamiento término-objeto mediante la acción de señalar. La acción de señalar interiorizada dará lugar al proceso de contar.

Sobre los tres años, el niño toca, normalmente, los objetos con la mano mientras que los cuenta. Alrededor de los 5 años no necesita tocar los objetos sino que los señala en un principio con el dedo y posteriormente con la mirada. De esta forma, en la acción de contar aparecen implicadas tres tipos de correspondencias.

- Un apareamiento temporal del término con la acción de señalar
- Un apareamiento entre la acción de señalar y un objeto concreto
- Un apareamiento entre el término y el objeto

Así, en la acción de señalar se crea una unidad espacio-temporal que conecta el objeto (que existe en el espacio) con la palabra (que existe en el tiempo).

Se han llegado a determinar cinco principios lógicos implícitos en el proceso de contar que son los siguientes.

Principio de orden estable. Para contar, los términos de la secuencia se han de recitar, siempre, en el orden establecido.

Principio de correspondencia. Al contar los elementos de un conjunto, ya hemos dicho, se va recitando la secuencia y a la vez, se van señalando los elementos del conjunto.

Principio de biunivocidad. En el proceso anterior, no basta solo con establecer una correspondencia entre palabra numérica y objeto, sino que dicha correspondencia ha de ser biunívoca. Esto supone que; a cada elemento del conjunto se le asignará una palabra numérica y recíprocamente; cada palabra estará asociada con un elemento.

Principio de cardinalidad. El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.

Principio de irrelevancia del orden. El cardinal de un conjunto, o sea, el número de elementos obtenidos al contar, no depende del orden en que estén dispuestos los elementos para contarlos.

Principio de abstracción. Cualquier conjunto o colección de objetos es contable. Puede suceder que los elementos que forman el conjunto sean todos homogéneos (lápices), o que no lo sean (lápices y bolígrafos), en este último caso puede haber problemas, pues el resultado de contar habrá que expresarlo en una categoría superior que comprenda a las dos anteriores como subconjuntos (útiles para escribir).

PUNTOS DE VISTA SOBRE LA ACCIÓN DE CONTAR

Los investigadores no se ponen de acuerdo sobre la importancia que tiene el acto de **contar** en el desarrollo de la noción de número.

Piaget y sus colaboradores dan poca importancia a la acción de contar en la construcción del número. Sostienen que dicha construcción se basa en los conceptos lógicos de seriación y clasificación y estos conceptos pertenecen a un estadio algo avanzado del desarrollo del pensamiento, el test de la conservación determinará si un niño ha llegado, o no, a ese estadio.

El número se construye, según Piaget, mediante una síntesis de dos tipos de relaciones que el niño establece entre los objetos por abstracción reflexiva: **el orden y la inclusión jerárquica de clases**.

El conocimiento del número, para esta teoría, está subordinado a la evolución del pensamiento lógico. Para contar significativamente, el niño ha de entender tareas como **la conservación de cantidades y las equivalencias entre conjuntos establecidas mediante correspondencias biunívocas**.

Otros investigadores, entre los que se encuentran Gelman, Schaeffer, Clements, aseguran que contar es esencial para el desarrollo de la comprensión del número y que la dificultad del niño para entender la conservación se debe, a que el niño no sabe contar.

La enseñanza que se desarrolle teniendo en cuenta uno u otro de los dos puntos de vista anteriores será distinta. Los seguidores de la primera teoría, propondrán al niño actividades que le ayuden en el desarrollo de sus capacidades lógicas y pospondrán las tareas de contar, ya que estas no tienen significado para el alumno. Los seguidores de la segunda teoría, por el contrario, piensan que es bueno centrar la atención en actividades que desarrollen técnicas específicas de contar y tareas que fomenten su aplicación. Así, para unos la enseñanza del número habrá de hacerse formalmente sobre una base lógica, para otros, habrá de hacerse de manera informal, contando.

ALGUNAS INVESTIGACIONES

Las investigaciones que Piaget, y sus discípulos, realizaron en este campo estaban montadas sobre tareas en las cuales el niño tenía que comparar conjuntos a través de correspondencias o formar conjuntos equivalentes a un dado (botellas y vasos, jarrones y flores, etc). Se identificaron tres estadios examinando la ejecución de las tareas por niños.

Estadio I(niños de edad entre 3,6 y 5,6 años). Hay una comparación global entre los conjuntos, no se forma la correspondencia biunívoca, ni hay equivalencia.

Estadio II (niños cuya edad estaba entre 4,6 a 6 años). Hay una correspondencia biunívoca, sin equivalencia perdurable. El niño obtiene una colección equivalente a la primera, pero piensa que una colección es mayor cuando se cambia de forma y adquiere mayor extensión.

Estadio III (niños de edad entre 4,11 y 5,6 años). Crean colecciones equivalentes a las dadas y además están seguros de que el número no cambia, aunque cambie la posición de una de sus colecciones.

Una de las conclusiones a las que llegan a partir de la hipótesis de que la construcción del número es una síntesis de las estructuras de agrupamiento y de la inclusión de clases fue que no hay una construcción del número cardinal separadamente de la del número ordinal sino que ambas se constituyen de manera indisociable, a partir de las clases y de las relaciones de orden que estará consolidada para los primeros números alrededor de los 7 u 8 años y posterior y progresivamente para el resto de la serie.

Clements (citado por Van de Valle, 1988) realizó un estudio con niños de 4 años y llega a la conclusión que las actividades de contar debidamente estructuradas llevan al niño a mejorar su formación tanto en habilidades numéricas como en operaciones lógicas. Sus resultados fueron:

- Niños entrenados en tareas lógicas ganan significativamente a niños que no han sido entrenados en estas operaciones
- Niños entrenados en estrategias de contar ganan significativamente en test de criterios numéricos a niños que no habían sido entrenados
- Niños entrenados en tareas lógicas, ganan poco en test de criterios numéricos a los que no habían sido entrenados
- Niños entrenados en estrategias de contar ganan espectacularmente en test de tareas lógicas a los que no habían sido entrenados

Explica estos resultados en el hecho de que considera que todos los principios implícitos en la tarea de contar son operaciones lógicas. En la misma línea están Donalson, Gelman, Schaeffer. Este último, como resultado de sus investigaciones, divide en cuatro estadios el proceso de adquisición del número, cada uno de los cuales presenta unas características propias, en cuanto al tipo de acciones que los niños son capaces de realizar. Las explicaciones que dan Gelman y Schaeffer sobre un mismo hecho, en algunos de los casos, son distintas. A continuación se describen los estadios de Schaeffer.

Primer estadio de Schaeffer

Edad de los niños, de 2 a 5 años. Se caracteriza porque los niños no son capaces de contar un conjunto de más de cinco objetos. Según Scheaffer, distinguen como diferente el número de objetos de dos conjuntos basándose en su configuración perceptual. Gelman, sin embargo, asegura que en este estadio el niño es capaz de reconocer colecciones pequeñas de objetos contando. En su opinión los niños han captado el aspecto cardinal del número en colecciones muy pequeñas pero no disponen de un aspecto ordinal implícito que le permita asignar una secuencia de nombres de números a una serie de objetos.

En este estadio las tareas que los niños son capaces de realizar son:

- Reconocer el número de elementos de un conjunto cuyo cardinal sea menor que cinco
- Distinguir qué colección es mayor, en el caso que al menos una de ellas tenga menos de cinco elementos
- Reconocer entre colecciones más amplias, relaciones de mayor y menor cuando los objetos están alineados y vea la existencia o no de correspondencias biunívocas

Segundo estadio de Schaeffer

Niños de 3,9 años. La edad de los niños es en algunos casos menor que la de los niños del estadio anterior. En este estadio los niños:

- Saben contar correctamente cinco objetos dispuestos en fila
- No aplican la regla de cardinalidad en la mitad de los casos
- Con números mayores el recuento no está dominado; cometen errores en la separación de los elementos ya contados o en la coordinación entre palabra y objeto
- No se ha captado aún la conexión entre el proceso de recuento y su resultado, que es el último número recitado y que representa la numerosidad de la colección, ni que

dicho número es invariante frente al orden que presenten los elementos del conjunto
- Para números pequeños, cuentan siempre la colección para dar el resultado, no subitizan. La explicación de Scheaffer a este hecho es que el recuento les da mayor seguridad a no equivocarse. La de Gelman es que el niño todavía no ha aprendido a reconocer grupos de configuraciones; esto ocurrirá cuando esté familiarizado con el número

Tercer estadio de Schaeffer
Niños de edad entre 3,3 y 5,3 años. En este estadio los niños:
- Saben aplicar la regla de cardinalidad, pero todavía no conocen cuando un número es mayor que otro (ejemplo 7 mayor que 5)
- Conectan el proceso de recuento con la regla de cardinalidad
- Los niños muestran mayor disposición para reconocer el número de elementos de una colección pequeña de objetos, sin contarlo

Cuarto estadio de Schaeffer
Niños de 5 a 5,11 años. Se caracteriza por la capacidad que presentan los niños para:
- Reconocer el mayor de dos números
- Contar sin cometer errores
- Comparar el tamaño de dos colecciones

En todas las descripciones de los estadios anteriores se supone que los conjuntos no sobrepasan los diez elementos.

Conclusiones de otros investigadores
Case, citado por Fuson y Hall, asegura que las tareas de contar dan al niño capacidad para aplicar el recuento automáticamente por lo que el niño se puede concentrar en otros aspectos y relaciones numéricas, como por ejemplo, establecer relaciones entre recuento y tamaño de una colección. Brianerd (citado por Dickson y col) asegura que la idea de ir emparejando los objetos de dos colecciones, con el fin de comparar

sus tamaños, es un logro relativamente tardío. Want señala que el emparejamiento biunívoco y las destrezas de recuento se desarrollan simultáneamente.

Hay varias consecuencias de estos estudios: los niños, a las cinco años, poseen una comprensión adecuada y operativa de los diez primeros números naturales, al menos en su forma oral; el conocimiento oral da suficiente capacidad para resolver problemas aritméticos sencillos expuestos oralmente; y es muy importante el papel del recuento para adquirir las nociones de cardinalidad y ordinalidad del número.

Las conclusiones de las investigaciones citadas nos dan idea de la cantidad de dificultades con las que tropieza el niño en su camino hacia la comprensión de la idea de número. Se detecta (como señalan Dikson y col., 1991) que en los últimos años se ha concedido una excesiva importancia a las correspondencias biunívocas en el aprendizaje infantil, en detrimento de uso de la práctica de contar.

Influencias en el currículo

En línea con la Escuela de Ginebra, en el Informe Piagetiano editado por el M.E.C. en 1987, se hace un listado de las capacidades que un niño debe de adquirir en relación con el concepto de número y las tareas que los mismos pueden desarrollar para conseguirlas. A continuación las enumeramos.

Capacidad para hacer comparaciones cuantitativas entre dos grupos de objetos

Se caracteriza por:

- Comparaciones brutas, mucho comparado con poco, comparado con la misma cantidad
- Hacer comparaciones exactas, colocando dos grupos de cinco a diez elementos en correspondencia provocada de uno a uno
- Hacer comparaciones exactas, colocando dos grupos de cinco a diez objetos en correspondencia no provocada de uno a uno. En este caso, los grupos de objetos no van juntos, necesariamente

Comprensión global de los efectos de añadir objetos a un grupo o de quitar objetos de ese grupo

A nivel de esta tarea se comprende que:

- Añadir objetos a una colección aumenta su número (lo hace mas) de modo que si se cuentan los números llegamos a un número mas alto
- Si se quitan objetos de un grupo reduce el número (lo hace menos)

Capacidad para distinguir números de atributos como: disposición de color, tamaño

Esto permite al niño conservar el número, es decir, el número permanece igual a pesar de cambios perceptivos. Esto es aplicable tanto a condiciones de identidad (realizando cambios dentro de un solo grupo) como a condiciones de equivalencia (involucrando cambios en un grupo cuando para empezar, hubo varios grupos equivalentes.

- *Identidad I.* El número de objetos de un grupo que se ha modificado, puede ser reestablecido cuando se vuelvan a colocar los objetos en su forma original. Un niño que se de cuenta de esto no tiene por qué darse cuenta que el número ha permanecido invariable todo el tiempo
- *Identidad II.* El número de objetos es el mismo incluso cuando se modifique la disposición original y no se vuelva a restablecer
- *Equivalencia I.* El número de objetos en colecciones equivalentes permanece igual cuando se construye la correspondencia destruida
- *Equivalencia II.* El número de objetos en grupos equivalentes permanece igual cuando ya no exista una correspondencia “uno a uno”. El niño no tiene la necesidad de reconstruir la correspondencia

Comprender como funciona el sistema decimal

Se caracteriza por:

- Saber contar de uno a veinte en secuencia
- Sumar uno a cualquier número da el siguiente
- Todos los números menores que uno determinado, están incluidos en ese número. Si tienen cuatro canicas, es cierto

que tienen dos canicas. Para darse cuenta de esta propiedad es necesario saber que cuando señala un objeto y dicen "siete" están identificando a todo el grupo de objetos. El señalado es solamente es, solamente, el séptimo objeto contado

Complementarias a estas actividades hay otras tareas que ayudan al niño en su proceso de adquisición del número. A continuación proponemos una serie de actividades para desarrollar la capacidad de contar y la utilización de números para representar una cantidad. (de Robert Robinson, 1989).

- Alumnos y profesor con los brazos levantados, empezando por la izquierda, doblar atrás cada dedo mientras se dicen los números
- Cuando el alumno está contando junto con el profesor, dejarle contar solo mientras el profesor dobla los dedos
- Invertir los papeles. El niño contará los dedos del profesor
- Batir palmas y contar a la vez, marchar y contar a la vez
- El profesor empieza a contar, llegado un momento se para y señala a un niño para que diga el número siguiente. Sigue contando y repite la operación con otro niño
- Con un recipiente de metal y objetos que suenen al caer: Dejar caer los objetos en el recipiente, de uno en uno, e ir contando a medida que estos suenen
- Se hace rebotar una pelota y se va contando cada bote. Otra posibilidad es tratar de adivinar el número de botes que va a dar
- Se hace rebotar la pelota y se le pide a un niño que bata tantas palmas como botes haya dado la pelota
- Los niños escuchan mientras el profesor bate palmas, después se les piden que digan cuantas palmadas se han dado
- Y tareas en donde se familiarice el signo con el nombre de los números tales como inventar un teatro o cuento para escenificar en donde los personajes sean los números. La puesta en escena se puede hacer colocando a un grupo de niños pegatinas de números en las manos el profesor va

narrando el teatro, o cuento, y los niños sacarán la mano adecuada en el momento que le corresponda

APRENDIZAJE DE LOS SÍMBOLOS

Dada la complejidad que supone leer y escribir los signos de los números, se aconseja que su aprendizaje se inicie al comenzar el período de enseñanza primaria. No obstante hay niños que ya a los cinco años son capaces de leer y escribir signos numéricos por lo que vamos a dar algunas ideas que consideramos de interés en este proceso. La habilidad de escribir cifras, al igual que la de escribir letras, es una destreza que requiere una maduración del sistema motor y una coordinación entre la vista y el movimiento de la mano. En algunos individuos existe descoordinación entre estas dos destrezas por lo que se requerirá más adiestramiento en una de ellas para conseguir su dominio.

Las siguientes actividades pueden facilitar la coordinación entre la vista y la mano:

- Pintar con los dedos siguiendo un camino
- Alinear objetos sobre una marca
- Recorrer con el dedo las plantillas de las cifras
- Dibujar las cifras sobre algún material continuo (ejemplo arena) o en el aire
- Moldear las cifras con plastilina o arcilla

No debemos pensar que este es un aprendizaje matemático ya que la habilidad para escribir cifras no tiene nada que ver con la capacidad para comprender su valor y utilizarlas correctamente, así mismo, la incapacidad para escribir un número no debe confundirse con la incapacidad para comprender las matemáticas.

La numeración y los cálculos son, ante todo, una manera de codificar y comunicar información resumida por lo que requiere gran importancia el que dicha escritura sea legible, esto obliga a cuidar el dominio de las técnicas de preescritura necesarias para conseguir el éxito. Entre estas técnicas podemos señalar:

- Coger el lápiz correctamente
- Colocar el papel de forma adecuada
- Copiar de un modelo, etc.

Una vez que los niños comienzan a realizar preescritura de números se hace necesario una gran atención con objeto de corregir los malos hábitos, si se producen, antes de que lleguen a estar consolidados.

Consideraciones sobre el cero

El número cero fue la última cifra que se incorporó a nuestro sistema de numeración. Durante mucho tiempo se pensó que los números expresaban la esencia de lo existente, por ello lo que "no es" no puede ser expresado de aquí que para el cero no se tuviera ninguna razón que impulsara su aparición. Esto nos puede dar idea de la dificultad, de tipo lógico, que su aprendizaje representa para el niño. Otro motivo que aumenta dicha dificultad es que no tiene significado en la mayoría de los contextos numéricos, veamos.

- En la secuencia numérica, no se suele comenzar por el cero
- En el recuento, lo usual es empezar a contar desde el uno
- El contexto cardinal es el único que lo contempla al considerarlo como cardinal del conjunto vacío
- En el contexto de medida no tiene sentido hablar de una medida cero

Sin embargo, hay un contexto en donde resulta muy gráfico hablar de cero, la calificación de cero dada a algo indica su falta de valor.

Estas consideraciones hemos de tenerlas en cuenta en la enseñanza del cero para el que el contexto cardinal y la ausencia de objetos puede facilitar su introducción e incorporación al resto de los números.

Carácter operatorio de los números

El interés por expresar numéricamente distintas situaciones o contextos no se agota con la simbolización de las cantidades mediante números pues la Aritmética surgió junto a un sistema de numeración para satisfacer necesidades primordiales y no sólo de recuento sino también operatorias; con los números no sólo se simbolizan cantidades, también las acciones, relaciones y transformaciones cuantitativas, que pueden realizarse sobre los objetos tienen un reflejo en las operaciones numéricas.

El interés del carácter operatorio del número presenta un doble vertiente. En primer lugar el número representa simbólicamente determinadas características del mundo real, en particular la cantidad, el orden y la medida, según hemos visto. Sobre los objetos reales y relacionado con la cantidad, hay acciones básicas: agregar, separar, reiterar, repartir, que expresan multitud de transformaciones con los objetos. También entre los objetos se pueden establecer relaciones como comparar, igualar, determinar las veces que uno abarca al otro, etc. Se trata de operaciones en el sentido físico del término, pero también en el sentido psicológico en cuanto conjunto de situaciones coordinadas y reversibles.

Este cúmulo de acciones del mundo real tiene su expresión simbólica correspondiente en las operaciones numéricas básicas: suma, resta, producto y división. Las operaciones numéricas son las que dan potencialidad al número: sin ellas, dice Vergnaud, el concepto de número podría no existir.

En segundo lugar, las operaciones establecen una red de conexiones entre los distintos números dando lugar a un sistema de relaciones interno dentro del conjunto de los números y dotándole de una estructura respecto de dichas operaciones fundamentalmente de la adición y de la multiplicación y sus operaciones inversas la sustracción y la división.

ETAPAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES

En el proceso de aprendizaje de las operaciones se distinguen varias etapas.

Las acciones

En primer lugar hay que considerar las acciones y transformaciones que se realizan en los distintos contextos numéricos considerando aquellos que presentan rasgos comunes y que darán lugar a un concepto operatorio, según la idea de Piaget de considerar las operaciones mentales como acciones interiorizadas.

Uso de modelos

En segundo lugar al abstraer las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos aparecen diferentes esquemas o ilustraciones, surgen lo que se denominan modelos. "una operación puede ser caracterizada como la colección de todos los modelos a los que representa" (Vest, 1969). Cada operación tiene sus propios modelos que ponen de manifiesto los contextos generales del número y la peculiaridad de cada operación.

Simbolización

La utilización de los modelos da paso a un nivel más alto de abstracción en el nivel operatorio y es la expresión simbólica de la operación; la notación simbólica de una operación, como por ejemplo 3+2=5, representa todos los modelos y todas las situaciones que puedan imaginarse en las que se reunan 3 y 2 elementos. La simbolización constituye una tercera etapa del aprendizaje de las operaciones.

Hechos numéricos y tablas

Usualmente se conocen dos números y la relación entre ellos y es necesario hallar un tercero realizando la operación. El número que corresponde hallar en cada caso se le llama conocer un dato o hecho numérico, en el caso de 3+2 el hecho numérico es conocer que el resultado es 5. La cuarta etapa es el aprendizaje, memorístico o no, de los hechos numéricos esenciales en cada operación. Esto usualmente se hace mediante el descubrimiento, invención y empleo de una serie de destrezas básicas y la memorización de algunos datos destacados, nunca es posible aprenderlos todos, cuya expresión canónica es la tabla de cada operación.

Algoritmos

La quinta etapa es aquella en la que el conocimiento de los hechos numéricos, unas pocas destrezas y reglas básicas permiten calcular el resultado de la operación con dos números cualesquiera. Es la etapa de adquisición del algoritmo correspondiente.

La utilidad del algoritmo en la realización de una operación radica en la simplificación que se hace de la misma sobre todo en aquellos casos en los que la operación es compleja debido a la magnitud de los números; esto es debido a las propiedades que caracterizan a los algoritmos, que son:

Nitidez. Gracias a esta propiedad la realización del algoritmo se transforma en un proceso mecánico.

Eficacia. Conduce a los resultados deseados mediante un número finito de pasos, suficientemente simples.

Universalidad. El mismo algoritmo se aplica a todas las situaciones de una misma clase.

Aplicación a la resolución de problemas

En sexto lugar aparecen las aplicaciones de las operaciones a la resolución de problemas. El hecho de colocar los problemas en la sexta etapa no quiere decir que los alumnos no puedan resolver problemas antes de pasar por todas las etapas anteriormente descritas, de hecho hay autores que señalan que la resolución de problemas hay que trabajarla desde la etapa de la acción.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Según Lester un problema es una tarea para la cual:

- El individuo o grupo se que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución
- No hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución
- Y el individuo o grupo debe de hacer un intento para encontrar la solución

Estas tres componentes tienen implicaciones especiales para la instrucción matemática. Elegir los problemas más inteligentes no es productivo si los estudiantes no están interesados o no quieren intentar resolverlos. La segunda componente requiere el fracaso inicial por parte de los estudiantes, al menos en el sentido de que el recuerdo de hechos o la aplicación de un algoritmo de cálculo previamente aprendido no de la solución. Desgraciadamente muchos de nuestros profesores tienen la idea de que el fracaso perjudica la confianza de los alumnos, consideramos con Lester la importancia que tiene el que los profesores comprendan que algo de fracaso no es solamente una buena cosa sino parte necesaria de la resolución de problemas. El estudiante puede no encontrar la solución inmediatamente, aunque dicha solución pueda estar al alcance de la mano. Los alumnos no deben de ser conducidos a creer que si una tarea no puede hacerse fácilmente entonces no puede hacerse en absoluto.

Investigaciones centradas en el resolutor han dado como consecuencia algunas diferencias entre buenos y malos resolutores de problemas, así Dodson identificó características discriminantes del éxito en la resolución de problemas e indica que los buenos resolutores son superiores respecto a la competencia matemática, habilidad para el razonamiento verbal y general, habilidad espacial, actitud positiva, resistencia a la distracción, ámbito de independencia y pensamiento divergente. Por su parte Krutetskii sostiene que los buenos resolutores de problemas son superiores a los malos en su habilidad para percibir la estructura matemática de un problema y generalizar situaciones que presentan una estructura similar.

La habilidad para resolver problemas no puede enseñarse, pero puede desarrollarse resolviendo problemas, no hay ninguna duda que la habilidad de resolución de problemas aumenta con la práctica.

Wheatley indica que una buena disposición para resolver problemas se puede alcanzar dentro del marco de la escuela, para lo que señala las siguientes recomendaciones:

- Crear una atmósfera propicia para la exploración, ya que los alumnos responden de forma positiva
- Fomentar posturas de interés y desafío hacia la exploración de problemas orales. Trabajando en grupo, presentando los problemas a través de material, relacionando los problemas con el juego, etc.
- Presentar situaciones problemáticas variadas. Situaciones que den al niño posibilidad de observar, describir, clasificar, ordenar, comparar, conjeturar, preguntar o realizar una representación deberán de formar las bases de un buen desarrollo mental
- Animar a los niños a desarrollar estrategias de resolución de problemas. Utilización de modelos, conjeturas y prue-

bas, ordenación de los datos y/o representación de los mismos

- Dar importancia a la actividad de contar y a la formación de patrones
- Facilitar a los niños material manipulativo. El material proporciona modelos que ayudan a la resolución de problemas de forma concreta, poco a poco se realizará el paso desde la manipulación y asociación de actividades mentales hasta la abstracción
- Fomentar la interacción entre los niños. El aprendizaje se consigue por el intercambio de ideas en un grupo, favoreciéndose así mismo el paso del egocentrismo al respeto del punto de vista del otro

Niveles de abstracción

En relación con la resolución de problemas aritméticos elementales numerosos autores han puesto de manifiesto la relevancia de diferentes factores intervinientes. Riley y otros (1983) diferencian entre factores globales y factores específicos, refiriéndose estos últimos a las características estructurales de las oraciones de los problemas, a la habilidad lectora, a la repercusión del método de instrucción seguido y, sobre todo a la presencia de ayuda en el momento de dar solución a un problema. Con respecto a la influencia de las ayudas, dichos autores consideran que la presencia de objetos manipulables conduce a una mejora en la ejecución de los niños, siendo incluso necesaria en algunos casos.

Otros investigadores ponen de manifiesto el efecto facilitador de la presencia de ayudas (como fichas, bloques etc.) durante la resolución de problemas, tanto si se manipulan como cuando se trata de una mera observación de los mismos. Quizá la incidencia de la presencia de objetos en la resolución de problemas aritméticos elementales sea más notable en la etapa prenumérica, durante la cual se hace patente la necesidad de apoyos externos de representación.

Fucson (1986) considera que la utilización simultánea de materiales concretos resulta bastante efectiva en la instrucción de la estrategia de contar a partir de un sumando, el manejo de los materiales parece organizar el conocimiento de algunos niños y facilitar el cambio hacia la estrategia más avanzada de contar a partir de uno de los sumandos.

Generalmente se consideran tres niveles en el proceso que siguen los niños hasta llegar a la abstracción en la resolución de problemas.

Nivel conceptual

Es el nivel más primitivo, es aquel en el que los niños modelan completamente la acción o las relaciones que se dan en el problema usando objetos físicos o dedos. En este nivel se caracteriza por el uso de materiales concretos y descripciones verbales.

Por ejemplo, con una situación de "quitar", un niño cuenta en voz baja una colección de objetos y los coloca debajo de un recipiente, a continuación saca de debajo del recipiente y desplaza algunos objetos para que un compañero vea lo que ha sacado. El segundo niño ha de describir verbalmente la acción realizada por el primero así como el resultado de la misma. Puede ser "tu has puesto cinco bolas debajo de tu pañuelo y después has sacado tres, por lo que debajo del pañuelo quedan dos bolas". El primer niño retira el pañuelo y se verificará la respuesta.

Nivel de conexión

En este nivel se siguen utilizando materiales concretos y descripciones verbales, pero además se van introduciendo los símbolos escritos correspondientes. Los niños tenderán a no representar físicamente las cantidades descritas en el problema y, poco a poco, serán capaces de realizar la operación de recuento por sí sola.

En la situación de juego descrita anteriormente uno de los niños ha de crear la sentencia numérica correspondiente a la situación utilizando algún tipo de material como pueden ser tarjetas en las que aparezcan los números y los signos implicados en el problema. Posteriormente se creará la sentencia numérica escribiéndola sobre el papel.

Nivel abstracto

En este tercer nivel las técnicas de recuento han dado paso a la utilización de los algoritmos para llegar a la solución del problema. Se presenta una sentencia numérica como 5-3 = ( ) y se les anima a que piensen y describan acciones asociadas a la misma.

Tipos de variables

La dificultad que pueden plantear los problemas aritméticos va más allá de cual sea la operación que los resuelve. Una resolución adecuada de los problemas aritméticos está condicionada por un gran número de variables, que se pueden clasificar en tres grupos: variables según la información en que se sitúa el problema, según la pregunta que se plantea y según la operación que lo resuelve.

Según la información que proporcionan

Transmisión de la información. Acción, representación, expresión verbal y expresión simbólica.

Datos numéricos de la información. Contándolos o midiendo, expresión simbólica o verbal, números o resultados de medidas, tipos de números (N, Z, Q, etc.), tamaño de los datos, orden en que aparecen los datos e inclusión o no de datos superfluos.

Relación entre los datos de la información. Relación explícita o tácita, relación por descripción o acción, relación de tipo lógico (unión, intersección, etc.) y encadenados o independientes.

Contexto de información. Situación más o menos real, estilo de la redacción, extensión, connotaciones que pueda implicar participación o no de los individuos en su obtención y vocabulario.

Según la pregunta planteada

Tipo de información que se pide. Dato exacto o aproximado, gráfica de datos o dato de un gráfico, elección de entre varias respuestas, relación entre los datos y acción para conseguir un objetivo.

Estructura de la pregunta. Combinación (relación estática entre los datos), cambio (relación dinámica), comparación (cuanto más, etc.), igualación (cuanto falta para, etc.) y tasa (en problemas de estructura multiplicativa).

Posición y extensión de la pregunta. Situación dentro del enunciado, extensión (todo o parte del enunciado) y única o varias dirigidas a una cuestión final.

Sentido de la pregunta. Si la pregunta está dentro de las cuestiones que el individuo puede presentarse, si la pregunta da o no respuesta a una necesidad real y si el dato que se obtenga se integra o no de modo coherente en el contexto informativo.

Según la operación que lo resuelve

Operaciones implicadas. Operaciones para cambio de unidades, operaciones para obtener el resultado, algoritmos empleados (o calculadora), cálculo mental y conveniencia o no del redondeo de los datos.

Conjunto numérico. Conjunto donde se realizan las operaciones, subconjunto dentro del cual aparecen los datos, pertenencia o no del resultado al mismo subconjunto que los datos y empleo o no de un único sistema de símbolos.

Sentencia abierta que proporciona el resultado. Tipo de sentencia (a+b=?, a+?=c, etc.), número de sentencias, orden y resolución de las sentencias, sentencias complejas y posibilidad de que varias sentencias produzcan el mismo resultado.

Recursos auxiliares. Empleo de material, apoyo gráfico, empleo o elaboración de tablas o esquemas, consideración de estructuras implícitas (por ejemplo, proporcionalidad), empleo de fórmulas, tanteo del resultado y verificación de resultados.

Todo lo expuesto en este punto hace referencia a los problemas aritméticos escolares de los que Nesher critica el hecho de no estar dados en lenguaje ordinario y no tener relación con las experiencias de los niños. Son estereotipados en su estilo y en su interpretación semántica y describen objetos y acontecimientos que no tienen ninguna realidad ni parecido con el mundo real, esto es debido, según la autora a la necesidad de dar toda la información requerida y la tendencia a elaborar un texto tan abreviado como sea posible; lo que da lugar a un texto lacónico, conciso y que en muchos casos emplea estructuras sintácticas muy difíciles.

2
Estructura aditiva

INTRODUCCIÓN

La estructura aditiva, de la que la suma y la resta son sus representaciones más sencillas, subyace (según Carpenter y Moser) en gran número de conceptos matemáticos, y su desarrollo en el niño ocupa un extenso período de tiempo ya que ha de cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños realizan al margen de su instrucción hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción. Este es un período crítico para el aprendizaje de las matemáticas por los niños y se creé que algunas de las dificultades posteriores en matemáticas tienen su origen en la deficiente instrucción inicial de la suma y la resta.

Según Piaget, los conceptos más elementales del número no están completamente desarrollados en los niños antes de los 7 años de edad (aproximadamente) aún cuando los conceptos de adición y substracción, que suponen conocimientos de conceptos numéricos básicos empiecen a la edad de 6 años. Muy pronto los niños entienden que la secuencia numérica se puede utilizar para realizar operaciones aritméticas. Los primeros pasos en este campo se dan en situaciones del tipo n + 1 y n - 1 (con n menor que 5), más tarde aparecerán situaciones de la forma n + 2 y n - 2 para pasar posteriormente a las del tipo n + m.

Las situaciones de suma y resta, entre números naturales, está basada en la idea de que juntando elementos a una colección dada aumenta su número y separando elementos disminuye su número. Pero una comprensión operatoria de la adición requiere (según Piaget) que un niño reconozca que el todo permanece constante independientemente de la composición de sus partes. Sus estudios le llevaron a señalar una serie de estadios, en el desarrollo de este concepto, paralelo al desarrollo de la conservación.

I estadio. Los niños no entienden que un conjunto de ocho objetos dividido en dos colecciones de cuatro sea equivalente a un conjunto de ocho objetos separado en dos colecciones de uno y siete objetos.

II estadio. Se resuelve bien la tarea después de verificaciones empíricas

III estadio. Reconoce que la composición de las colecciones no afecta al conjunto final.

En principio, los niños no reconocen que el efecto de añadir elementos a una colección pueda ser neutralizado separando el mismo número de elementos y que añadir elementos a una colección equivalente a otra puede compensarse añadiéndole a la otra el mismo número de elementos.

Las investigaciones realizadas sobre las dificultades que los niños encuentran cuando realizan operaciones de suma y resta han dado los siguientes resultados:

- Las dificultades aumentan a medida que aumentan los números
- Las sumas en las que el primer sumando es mayor que el segundo ofrecen menos dificultad que aquellas en las que el primer sumando es menor que el segundo
- Las sumas cuyos sumandos son pares son más sencillas que aquellas que presentan algunos de ellos impar
- El caso de tener los dos sumandos iguales, presenta menos dificultad que en cualquier otro caso

Estrategias para sumar y restar

Se han determinado y clasificado las estrategias que los niños utilizan cuando realizan sus primeras operaciones de suma y de resta.

Para la suma

Elaboración de un modelo con dedos u objetos. Se presentan dos casos, en el primero, se construyen dos colecciones cuyo número de elementos sean los números dados y se precede de dos formas distintas: juntar las dos colecciones y contar todo o contar sin hacer la unión física de las colecciones; en el segundo, se construye una sola colección y se incrementa en tantos elementos como indique el segundo sumando.

Secuencias de recuento. Se cuentan los objetos que se supone se deben de reunir sin realizar ninguna acción física, se trata de conductas puramente verbales y se puede proceder de varias formas: contar todo (el niño cuenta todos los objetos), contar a partir del primero de los números dados o contar a partir del mayor de los números.

Datos numéricos recordados .Emplean combinaciones numéricas que recuerdan como son: aplicación de la idea de doble o aplicación de sumas conocidas como $6 + 4 = 10$.

Para la resta

Modelos directos con objetos. Se construye una colección de objetos que represente al minuendo y de esta se van quitando objetos, esto se puede realizar de varias formas: quitando de (se quitan tantos objetos como indica el substraendo), quitando hasta (se van quitando al minuendo elementos hasta que quede el substraendo, el recuento de lo que se ha quitado dará el resto), añadiendo hasta (se forma un conjunto que representa al substraendo, se van añadiendo objetos hasta tener el minuendo el numero de objetos añadidos es el resto), emparejamiento (los conjuntos formados se tratan de emparejar, contando los elementos no emparejados se obtiene la respuesta).

Recuento. Sin utilizar objetos físicos, se pueden considerar varias: contar hacia atrás desde (contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indica el substraendo, el número anterior al último contado es la diferencia), contar hacia atrás hasta (contar hacia atrás desde el minuendo hasta alcanzar el substraendo, el número de pasos dados es el resto), contar hacia delante desde (se cuenta desde el substraendo hasta el minuendo, el número de pasos dados es la diferencia).

Datos numéricos recordados. Utilización de algún hecho numérico que conozcan.

Estas estrategias no se enseñan ni se aprenden en la escuela, el niño las elabora para resolver los problemas que encuentra en su medio y a veces las mantiene por encima de su aprendizaje escolar. Es conveniente que el profesor las conozca y sepa ampliar en cada ocasión y para cada niño su campo de utilidad.

MODELOS PARA LA SUMA

Son muchos los modelos posibles que se pueden considerar para cada operación ya que son distintas las variables que pueden combinarse. Por un lado están los distintos contextos numéricos; por otra parte hay que considerar si el modelo es estático e incluye sólo estados, o es dinámico y comprende también operadores; el modelo puede ser gráfico o físico y en cada uno de estos casos los materiales utilizados pueden variar. A continuación vamos a describir algunos modelos gráficos.

El estudio de la adición y sustracción debe de realizarse en simultaneidad con el trabajo sistemático sobre los diferentes números, de modo integrado. Cada número debe aparecer como un sistema integrado de relaciones y no como algo puramente estático. Así conocer 5 es saber que $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 9 - 4$ etc. En el estudio de cada número es importante trabajar sobre expresiones gráficas que modelicen cada uno de los contextos del número.

Modelos lineales

El primer modelo que vamos a considerar es la línea numérica. Según Resnick (1983) la línea numérica es un esquema mental que integra la sucesión de términos que sirven para contar, y que a su vez expresan el cardinal, al menos con pequeñas cantidades que se perciben con un sólo golpe de vista.

La línea numérica suele estar bastante consolidada en preescolar y se utiliza para realizar operaciones, como hemos descrito, o bien para comparar directamente cantidades. Modelos físicos de línea numérica son: plantillas, reglas numeradas, etc.

Modelos cardinales

Una segunda clase de modelos corresponde a los contextos cardinales, y en ellos suelen aparecer los diagramas de la teoría de conjuntos. Estos esquemas se pueden emplear con carácter estático no hay acción-, o con carácter dinámico -la operación es el resultado de una acción. En el primer caso se trata de esquemas en los que se expresa la relación parte/todo descrita bien por un conjunto dividido en dos partes disjuntas, o bien, un conjunto en el que hay señalado un subconjunto y por complementación se considera el otro.

Modelos con medidas

El contexto de medida tiene también varios modelos entre los que destacan los modelos longitudinales como son las regletas de Cuisenaire o bien modelos sobre otras magnitudes como la balanza para la comparación de pesos. Con las regletas Cuisenaire se pueden hacer actividades aditivas como la construcción de trenes con dos o más regletas y luego medir su totalidad con una única regleta; también se pueden hacer actividades de sustracción como determinar el complemento de una regleta respecto de otra mayor.

El modelo de la balanza parece especialmente adecuado para la adición, y la situación de equilibrio de la balanza expresa la igualdad entre los sumandos (cantidades colocadas en un brazo) y el resultado (cantidad única colocada en el otro brazo). Existen varios modelos comerciales de balanza, algunos de los cuales hacen uso de la distancia a la que se colocan los pesos del fiel mientras que otros sitúan los pesos en ambos casos a distancias iguales, sin hacer uso del principio o ley general de la balanza.

Modelos funcionales

Un último modelo es el modelo funcional u operatorio en el que se considera que el primer sumando (o el minuendo) es un estado inicial o de partida, el segundo sumando (o el substraendo) es un operador o transformación de aumento / disminución que se realiza sobre el estado inicial; el resultado, en cualquier caso, es el estado final. En este modelo se supone que la operación es una máquina que transforma números en otros números, mediante una ley determinada.

Así, en este modelo, la operación 2 + 5 = 7 se esquematiza por:

2 ———	+5	——→ 7
estado inicial	operador	estado final

y la operación 7 - 5 = 2 se esquematiza por:

7 ———	-5	——→ 2
estado inicial	operador	estado final

Supone una iniciación al concepto de función, y va a resultar de mucha utilidad en operaciones posteriores.

EL ANÁLISIS DE CADA NÚMERO

Al estudiar cada número en concreto hay que trabajar con todas las sumas cuyo resultado sea ese número, por ejemplo, al estudiar el número 5 se debe de tener en cuenta que:

$$0 + 5 = 5;\ 1 + 4 = 5;\ 2 + 3 = 5;$$

$$3 + 2 = 5;\ 4 + 1 = 5;\ 5 + 0 = 5;$$

estas son las **composiciones** del número 5. También debe trabajarse la composición mediante unidades: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.

Aquí nos estamos refiriendo sólo a la expresión simbólica de las composiciones, pero éstas hay que comenzar a trabajarlas desde la manipulación, pasando por el relato, el modelo -en particular las representaciones gráficas- hasta llegar a la simbolización. En todas estas etapas hay problemas para resolver.

También hay que trabajar los **desarrollos** del número:

$$5 = 5 + 0;\ 5 = 4 + 1;\ 5 = 3 + 2;\ 5 = 4 + 1;\ 5 = 0 + \text{y}$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Los desarrollos tienen un interés destacado porque suponen un primer paso en la inversión o reversibilidad piagetiana de las operaciones.

Si $3 + 2 = 5$ resulta que $5 = 3 + 2$: se puede volver al punto de partida.

De igual modo hay que estudiar todas las sentencias abiertas que tengan 5 como resultado:

$$3 + ? = 5;\ ? + 2 = 5;\ 2 + 3 = ?,\ \text{etc.}$$

Con el mismo proceso: composición-desarrollo-sentencias abiertas se trabajan todas las restas con minuendo el número estudiado, 5, en este caso:

$$5 - 0 = 5;\ 5 - 1 = 4;\ 5 - 2 = 3;\ 5 - 3 = 2;$$

$$5 - 4 = 1;\ 5 - 5 = 0,\ \text{etc.}$$

Relaciones entre números

Se llega así a establecer la red completa de relaciones en las que está implicado el número en cuestión. Estas relaciones se estudian en el nivel más alto de abstracción: el simbólico. Por ello en cualquier momento conviene realizar el camino de vuelta e inventar, dibujar o localizar situaciones que respondan a cada una de las expresiones simbólicas estudiadas.

Hay otras relaciones entre números que también deben estudiarse:

Como $4 + 1 = 5$, por eso 5 es el **sucesor** o **siguiente** a 4, va **después** de 4.

Como $6 - 1 = 5$, por eso 5 es el **anterior** a 6, va **delante de** 6.

Además 5 es **mayor que** 0, 1, 2, 3 y 4 y también es **menor que** 6, 7, 8, 9, 10, etc. De nuevo estas relaciones se expresarán con situaciones reales y se aplicarán en la Resolución de problemas.

APRENDIZAJE DE LOS HECHOS NUMÉRICOS. LAS TABLAS

Cada una de las relaciones señaladas entre números se conoce como un **dato** o **hecho** numérico. Uno de los objetivos usuales de la enseñanza de la Aritmética es el aprendizaje por parte del niño de los hechos numéricos básicos de cada una de las operaciones. Estos hechos suelen disponerse en un cuadro de doble entrada en donde las filas y las columnas -para el caso de la suma- vienen señaladas de 0 a 9, y en el cruce de cada fila se encuentra el resultado de sumar los dígitos correspondientes. La memorización de estos resultados se llama “aprendizaje de la tabla de sumar”, y va desde 0 + 0 hasta 9 + 9. En el caso de la tabla de restar aparecen como datos básicos también desde 9 - 9 hasta 0 - 0, pero no se incluyen aquellos casos en los que el minuendo sería menor que el substraendo.

Las primeras investigaciones sobre adición y sustracción intentaron ordenar la dificultad relativa de las 100 combinaciones numéricas básicas para estas operaciones. La conclusión obtenida es que no hay orden intrínseco de dificultad entre combinaciones numéricas; la dificultad es relativa a muchas condiciones, la principal de las cuáles es el método de enseñanza seguido. [Carpenter y Moser, 1983].

En términos generales, la dificultad aumenta cuando los números son mayores. Si el sumando mayor aparece en primer lugar la suma resulta más sencilla; dos sumandos pares combinan mejor que uno par y otro impar; cuando los dos sumandos son iguales el resultado se mantiene más fácilmente en la memoria.

Todas estas causas permiten que el niño no necesite memorizar todos los datos de la tabla, al menos en su comienzo, sino que utilice diferentes estrategias para alcanzar un resultado, en donde jueguen otras relaciones de la tabla.

Ya hemos comentado algunas estrategias para sumar y restar contando, que el alumno conoce desde Preescolar; no conviene desalentar estas estrategias sino procurar que se perfeccionen y se empleen para operar. No es conveniente exigir la memorización de las tablas. En el caso de la suma y de la resta el aprendizaje se realiza sobre unos pocos hechos básicos y la utilización de estrategias adecuadas. Sí conviene que demos a nuestros alumnos un entrenamiento suficiente y no rutinario.

Elaboración de la tabla de sumar

Aunque no es de uso frecuente la tabla de sumar, esta puede elaborarse por los niños a partir del proceso de contar de la siguiente forma:

Se construye una tabla de doble entrada, en la primera fila y en la primera columna se colocan los números de 0 a 9.

El proceso para rellenar la tabla puede hacerse por filas o por columnas pero en orden y siguiendo esta regla: cada fila comienza con el mismo número que presenta ya escrito de haber hecho la primera columna y se continua siempre aumentando de uno en uno sea, contando.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

El uso de esta tabla se hace de la siguiente manera: para conocer cual es el resultado de una suma cuyos sumandos son menores que 10 se busca la unión de la fila y la columna encabezada por dichos sumandos; para sumandos mayores que diez hay que seguir el mismo procedimiento dentro de las reglas propias del algoritmo.

Se puede utilizar también la tabla para conocer el resultado de una diferencia de la siguiente manera: se localiza el minuendo en el interior de la tabla de manera que el lugar que ocupa corresponda a la fila encabezada por el substraendo, el número que encabeza la columna es la diferencia.

Resolución de problemas verbales aditivos

Se considera un problema matemático a toda situación que entrañe una meta a lograr y en donde casi siempre existirá un obstáculo para alcanzar dicha meta. La situación es normalmente cuantitativa y casi siempre se requieren técnicas matemáticas para su resolución pero es posible a veces resolverlos por una deliberación caso de no conocer el algoritmo necesario para tal ocasión.

Tradicionalmente en los programas de cálculo elemental los problemas se introducen después del estudio de las operaciones y los algoritmos a aplicar para resolver dichos problemas pues se piensa en los problemas como ejercicios sobre los que se aplican técnicas de cálculo bien conocidas.

Actualmente se aconseja introducir los problemas a la vez que las operaciones apropiadas para resolverlos, y esto por dos razones, considera Kamii: a) los niños construyen su conocimiento aritmético a partir de la realidad. b) la investigación ha demostrado que los niños pequeños son capaces de resolver problemas, a veces, mejor que los que ya han sido sometidos a un aprendizaje para tal efecto. Los problemas verbales son fácilmente solucionados por los niños sin que haga falta una enseñanza formal. Para estas ocasiones los problemas habrá que tomarlos de la vida real de los niños y de su entorno propio.

> *Empezar el cálculo sin sentido para pasar después de estas técnicas al mundo real, es contrario a lo que sabemos de la manera de pensar de los niños (...) si uno de los fines de la enseñanza de la aritmética es capacitar a los niños para la resolución de problemas de la vida real hemos de animarles a tratar con problemas desde el primer día de entrar en clase. (Kamii, 1985).*

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS ADITIVOS SIMPLES

Problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con una operación de suma o de resta. De ellos podemos hacer varias clasificaciones dependiendo del tipo de variable que consideremos. Los problemas simbólicos de estructura aditiva variarán según la sentencia abierta dada en el problema. Cambiando la incógnita se generan seis sentencias abiertas para la suma y otras seis para la diferencia.

Tipos de sentencias abiertas	
Para la suma	Para la resta
a + b = ?	a - b = ?
a +? = c	a -? = c
? + b = c	? - b = c
? = a + b	? = a - b
c = ? + b	c =? - b
c = a + b	c = a -?

El estudio sobre la dificultad que presentan las diferentes sentencias ha dado las siguientes conclusiones.

- Las sentencias canónicas de adición y sustracción (a + b = ?, a - b = ?) presentan menos dificultad que las no canónicas
- Las sentencias de sustracción son generalmente mas difíciles que las de adición
- No hay diferencias notables entre las sentencias a +? = c, ? + b = c y a - ? = c en cuanto a dificultad
- La sentencia minuendo desconocido ? - b = c, es significativamente más difícil que las otras cinco
- Las sentencias con la operación al lado derecho del signo igual son significativamente más difíciles que las otras

Muchas de las dificultades que tienen los niños al resolver problemas verbales de adición y sustracción se debe a su limitada comprensión de las operaciones aritméticas con las que estos se resuelven. A menudo no saben cuando se debe utilizar una de estas operaciones porque les falta el conocimiento específico referente a las variadas situaciones que dan lugar a estas operaciones. Se les suele enseñar la adición solamente como "poner juntos" y la sustracción como "quitar" a pesar de las otras circunstancias que implican operaciones de sumar y de restar. Los niños necesitan recibir instrucción específica en diferentes situaciones si queremos que consigna buenos resultados en la resolución de este tipo de problemas verbales.

De aquí que consideremos de gran interés la clasificación de problemas que realiza Nesher atendiendo a la estructura semántica de los mismos. Cuatro categorías se pueden considerar en los problemas verbales escolares que sugieren las operaciones de adición y substracción:

Categoría de cambio

La categoría de **cambio** en la que los problemas implican un incremento o disminución de una cantidad inicial hasta crear una serie final. En estos problemas hay implícita una acción. Intervienen tres cantidades, una inicial, otra de cambio y una final. La cantidad desconocida puede ser cualquiera de ellas por lo que da lugar a tres tipos de problemas. El cambio puede ser de aumento (cambio-unión) o de disminución (cambio-separación) por lo que hay dos modalidades para cada uno de los casos anteriores lo que hace un total de doce el número de problemas de cambio que se pueden formular.

En todos los casos el cambio ocurre en el tiempo, la condición inicial se da en un tiempo T_1 el cambio se produce en un tiempo T_2 y el resultado se alcanza en un tiempo T_3. A continuación se presentan algunos ejemplos.

La cantidad inicial y la magnitud del cambio son conocidas. Ana tenía 5 cromos y compra 3 cromos más, ¿cuántos cromos tiene ahora? María tenía 9 cromos dio 5 a su amiga Pilar, ¿cuántos cromos le han quedado?

La cantidad inicial y el resultado del cambio son conocidos, la incógnita en este caso es la magnitud del cambio. Juan tiene 6 bolas y quiere comprar algunas para tener 9, ¿cuántas bolas ha de comprar? Susana tiene 7 bolas, da algunas a su primo y le quedan 4, ¿cuántas bolas da Susana a su primo?

La incógnita es la magnitud inicial conociéndose la magnitud del cambio y el resultado final. Ana tenía algunos lápices, su hermano le dio 4 y ahora tiene 7, ¿cuántos lápices tenía Ana? Pepe tenía algunos lápices, dio 3 a su hermano y le han quedado 4, ¿cuántos lápices tenía Pepe?

Categoría de combinación

La segunda categoría son los problemas de **combinación** o parte-parte-todo. Hacen referencia a la relación que existe entre una colección y dos subcolecciones disjuntas de la misma. La diferencia fundamental entre estas dos categorías de problemas es que la combinación no implica acción. Un problema de combinación tiene tres cantidades relacionadas lo que da lugar a dos tipos de problemas. Por ejemplo:

Conocer la colección total y una de las subcolecciones y desconocer la otra subcolección. Luis tiene 10 bloques, de ellos 3 son azules y el resto son amarillos, ¿cuántos bloque amarillos tiene Luis?

Conocer las dos subcolecciones y desconocer la colección total. Irene tiene 4 bloques rojos y 5 azules, ¿cuántos bloques tiene Irene?'

Categoría de comparación

La tercera categoría, de **comparación**, implican una comparación entre dos colecciones. La relación entre las cantidades se establece utilizando los términos "más que", "menos que". Cada problema de comparación tiene tres cantidades expresadas: Una cantidad de referencia, una cantidad comparativa y otra de diferencia. Hay seis tipos de problemas de comparación. La cantidad desconocida puede ser la cantidad de referencia, la comparativa o la diferencia, para cada una de estas posibilidades la comparación puede hacerse de dos formas: la cantidad comparada (más grande) es más que la cantidad de referencia (más pequeña), la cantidad comparada es menos que la de referencia. Por ejemplo:

Referente y referido conocidos, se desconoce la comparación. Antonio tiene 6 galletas y Jaime 4 galletas, ¿cuántas galletas tiene Antonio más que Jaime? Javier tiene 9 galletas y Carlos tiene 3, ¿cuántas galletas tiene Carlos menos que Jaime?

Referente y comparación conocidos, se desconoce el referido. Ignacio tiene 5 caramelos y María tiene 3 caramelos más que él, ¿cuántos caramelos tiene María? Nuria tiene 8 caramelos y Alberto tiene 4 caramelos menos que ella, ¿cuántos caramelos tiene Alberto.

Referido y comparación conocidos, referente desconocido. Pilar tiene 3 galletas, ella tiene 2 galletas más que Pedro, ¿cuántas galletas tiene Pedro? Lola tiene 4 galletas y Jesús tiene 3 galletas menos que ella, ¿cuántas galletas tiene Jesús?

Categoría de igualación

Una cuarta categoría llamada de **igualación** puede considerarse "a caballo" entre las de cambio y comparación ya que se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disjuntas. Hay que responder qué hacer con una de colecciones para que presente el mismo número de elementos que la otra. Por ejemplo:

La acción hay que realizarla sobre el mayor de las colecciones en cuyo caso se tiene una separación-igualación. Carmen tiene 8 globos y Cesar tiene 6, para tener tantos globos como Cesar, ¿cuantos globos ha de romper Carmen? Andrés tiene 5 globos y Tomás tiene unos cuantos, si Tomás rompe 3 globos tendrá tantos como Andrés, ¿cuántos globos tiene Tomás? Lucía tiene 8 globos y Miguel tiene unos cuantos, si Lucía rompe 4 globos tendrá el mismo número que Miguel, ¿cuántos globos tiene Miguel?

La acción se realiza sobre la menor de las colecciones en este caso se tiene una unión-igualación. Inés tiene 7 cromos y Pablo tiene 4 cromos, ¿cuántos cromos tiene que ganar Pablo para tener tantos como Inés? Enrique tiene 5 cromos y Elena tiene unos cuantos, si Elena gana 2 cromos tendrá el mismo número que Enrique, ¿cuántos cromos tiene Elena? Margarita tiene 6 cromos y Julián tiene unos cuantos, si Margarita gana dos cromos tendrá tantos como Julián, ¿cuántos cromos tiene Margarita?

Dificultades de aprendizaje

Algunos de los resultados proporcionados por los estudios realizados sobre dificultades en la resolución de problemas son:

- En los primeros niveles resultan más sencillos los problemas, si se presentan con materiales, grabados o dibujos
- La longitud del enunciado, el número de oraciones, la posición de la pregunta, son variables útiles para explicar la dificultad del problema
- El tamaño de los números y la presencia del símbolo en vez de números concretos incrementa la dificultad del problema
- La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben de ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema, es también una fuente de dificultad

Por lo que se refiere a los distintos clases de problemas verbales a los que hemos hecho mención anteriormente Thompson y Hendickson (1986) del examen de los distintos tipos de problemas y la observación de cómo los niños los resuelven concluyen que hay problemas más difíciles de resolver que otros. En general parece que la estructura inherente del problema es el factor crucial para determinar su dificultad.

Los problemas de combinación 1 son estructuralmente directos. Se dan las dos colecciones. Los niños pueden contarlas separadamente, después solamente deberán de volver a contar la colección entera para determinar la solución del problema. O, dependiendo de la instrucción que hayan recibido, podrán usar "todo" o "todo junto" para transformarlo en un problema de cambio.

Los problemas de combinación no son directos. Las cantidades que han de ser consideradas no están separadas una de otra. Los niños han de tener un buen desarrollo de la comprensión parte-todo. Se da la colección entera y una parte de la colección. Para resolver este tipo de problemas los niños han de saber que la subcolección dada está dentro de la colección mental o psíquicamente para separar la subcolección de la colección completa y contar la otra subcolección. Este problema puede ser transformado en un problema de cambio 2 por algunos niños.

Otros niños lo transforman erróneamente en un problema de comparación entre las dos subcolecciones.

En los problemas de comparación en los que se conoce la colección mayor y la diferencia y se ha de determinar la colección menor como por ejemplo "María tiene 7 lápices y Juan tiene 3 lápices menos que María ¿Cuantos lápices tiene Juan? Para resolver este problema si el niño crea lo que está escrito, formará una colección de 7 lápices y le quitará 3 lo que le convertirá en un problema de cambio. En el caso de que el problema sea "María tiene 5 caramelos, ella tiene tres más que Pepe. ¿Cuantos caramelos tiene Pepe? Para resolver este problema el niño ha de utilizar una estructura cognitiva diferente para determinar el proceso a seguir. No se pueden agregar tres caramelos a los que se tienen pues se desconoce cual es esta cantidad. El niño ha de comprender que si la colección mayor es tres más que la menor, esta a su vez es tres menos que la anterior, lo que exige un desarrollo de lo estructura cognitiva denominada reversibilidad. Debe de entender que la expresión "x es más que y" es equivalente a "y es menos que x". Sólo de esta forma el niño puede saber que quitando objetos a la colección mayor se da cumplimiento a la relación más que, esta reversibilidad capacita a algunos niños a transformar los problemas de combinación 2 en problemas de cambio 2.

Otro factor que afecta a los problemas de comparación es que la cantidad de referencia debe de ser construida mentalmente por el niño e igualmente debe de sumarla o restarla mentalmente a la colección dada para obtener la colección desconocida. Otra dificultad de los problemas de comparación se debe al uso de las expresiones "más que" (que en ocasiones se asocia con suma) y "menos que" (asociado en otras ocasiones con resta).

Las investigaciones hasta ahora realizadas sobre las dificultades que presentan los distintos tipos de problemas han determinado un orden de dificultad para los mismos: de más fácil a más difícil.

1°. Ver los dos ejemplos donde la cantidad inicial y la magnitud del cambio son conocidas, y el ejemplo donde se conoce la colección total y una de las subcolecciones y se desconoce la otra subcolección.

2°. Ver los dos ejemplos donde la cantidad inicial y el resultado del cambio son conocidos y donde la incógnita en este caso es la magnitud del cambio, y los dos ejemplos donde el referente y el referido son conocidos y se desconoce la comparación.

3°. Ver el ejemplo donde se conocen las dos subcolecciones y se desconoce la colección total, los dos ejemplos donde la comparación y el referido son conocidos y el referente es desconocido, y los dos ejemplos donde la comparación y el referente son conocidos, y donde se desconoce el referido.

TAREAS Y SITUACIONES PROBLEMÁTICAS PARA NIÑOS

Asegura Kamii que las situaciones de cada día y los juegos colectivos proporcionan muchas oportunidades para que los niños piensen y resuelvan problemas.

"Hay muchos momentos en el desarrollo de la clase en los que se puede plantear una votación o cualquier otra situación en cuya resolución interviene aspectos aritméticos, entonces hay que detenerse y discutir ya que los niños se encuentran emocionalmente implicados y su mente es mas activa para el aprendizaje." Asegura, que no creé que los ejercicios repetitivos y mecánicos que se realizan en los cuadernos provoquen una actividad mental tan rica, aunque no quiere esto decir que los niños no aprendan a través de los cuadernos de ejercicios, sino que el aprendizaje es de carácter distinto.

En su libro "El niño reinventa la Aritmética" presenta una serie de situaciones cotidianas en las que analiza los aspectos numéricos que contienen. Así por ejemplo situaciones de votaciones por distintas causas, control de asistencia a clase, control sobre el material utilizado en un juego o actividad, distribución de un material, etc. Además de una serie de juegos colectivos de entre ellos hemos tomado el siguiente.

Un niño piensa un número y sus compañeros han de adivinarlo. El niño que ha pensado el número debe de escribirlo sus compañeros de juego han de adivinarlo, para ello uno de los compañeros dice un número y el que lo ha pensado responderá es mayor o menor. El niño que consigna adivinar de que número se trataba será el encargado de pensar otro número.

JUEGOS

Disponemos de una colección de objetos, los niños han de conocerlos bien, para ello se procederá a una etapa de juego libre, posteriormente se pasará al juego que consiste en esconder varios objetos en la clase y tratar de encontrarlos. Se pueden ir planteando preguntas sobre el número de objetos encontrados el número de los mismos que falta por encontrar, introduciendo así a los niños en las nociones de suma y resta.

El juego de las canicas o los bolos se prestan también a planteamientos de preguntas sobre cuantificación cuya respuesta por parte del niño requiere que este resuelva un verdadero problema de estructura aditiva. Los juegos de cartas son útiles para el desarrollo del pensamiento numérico. Estos pueden ser muy variados tanto por la cantidad de los mismos que se pueden realizar como por el grado de complejidad de los mismos. Como ejemplo tomamos el siguiente de Garzón y Martínez. Se eligen las cartas de menor puntuación (del uno al siete) barajadas y amontonadas en el centro de la mesa, cada jugador tomará una carta y la pondrá boca arriba, el que saque la carta más alta se llevará todas las demás.

Los juegos del dado y del dominó ayudan al niño a adquirir la habilidad de conocer los números que están representados en las caras por la disposición que presentan los puntos sin necesidad de contar. La variedad de ellos es también muy grande y las posibilidades también, pues se pueden utilizar un solo dado o más de uno. Por ejemplo para dos jugadores. Con dos dados y unas fichas para apostar, los dos jugadores tiran los dos dados gana el que sume mayor puntuación este juego permite desarrollar gran cantidad de relaciones entre los números. Así por ejemplo, si uno de los jugadores ha obtenido un tres y un cinco y el otro un tres y un seis los niños llegan a darse cuenta que no es necesario contar ni sumar ya que tienen un sumando igual por tanto gana el que tenga mayor el otro sumando.

3
Estructura multiplicativa

INTRODUCCIÓN

Al igual que en el caso de la suma y resta, el aprendizaje del producto y la división es el comienzo de la construcción de una nueva estructura: la estructura multiplicativa, que es una de la más ricas de la matemática. Sin embargo existen algunas diferencias con respecto a la estructura aditiva. Comenzar a trabajar en el producto y en la división exige que el niño tenga un nivel de uso y dominio de los números, que conozca su simbolización, todo ello en un grado más completo que en el caso de la suma y la resta.

La adición y la sustracción se estudian con simultaneidad a la adquisición del concepto de número. El producto y la división son operaciones que necesitan un dominio previo de los números y de su simbolización. La razón de esto la encontramos en el propio concepto de cada operación. Multiplicar es reiterar una cantidad, en su nivel más intuitivo. Los dos términos del producto responden a contextos diferentes; uno de ellos es la cantidad que se repite – multiplicando–, y es un número cardinal concreto, con objetos que se ven. El otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial –multiplicador-, y es una especie de cardinal de segundo orden o cardinal de cardinales, mucho más abstracto que el anterior, y por eso mismo se debe simbolizar de inmediato.

Igual ocurre con la introducción a la división. Dividir es repartir una cantidad en partes iguales. El dividendo es la cantidad a repartir, y se trata usualmente de un número en contexto cardinal, expresado mediante objetos concretos. El divisor es el número de partes, también un número cardinal, pero más abstracto, que de inmediato pasa a escribirse simbólicamente. Tanto en un caso como en el otro se utilizan dos niveles diferentes de cardinación, y por ello es necesario utilizar los signos numéricos propios casi desde el comienzo. Este es uno de los motivos por los que se suele esperar al segundo año de escolaridad para iniciar el estudio del producto y la división.

Hay una segunda razón de tipo práctico. Como el producto se presenta como una suma reiterada, conviene tener un cierto dominio de esta operación, que permita un cálculo más rápido en los productos. Para no entorpecer la multiplicación con dificultades propias de la suma, es por lo que se suele dejar uno o dos cursos de diferencia entre el estudio de ambas operaciones. Así, los algoritmos y destrezas de la suma habrán madurado lo suficiente como para permitir un comienzo más firme y seguro en el producto.

MODELOS PARA EL PRODUCTO Y DIVISIÓN

Son muchos los modelos posibles para estudiar la multiplicación y división y, como ya hemos observado anteriormente, cada uno de los modelos enfatiza un contexto particular del número.

Modelos lineales

En primer lugar podemos considerar modelos de recuento, en los que se utiliza la línea numérica. Si la línea numérica tiene un soporte gráfico, el producto n x a ("n veces a") se modeliza formando un intervalo de longitud a-unidades y contándolo n-veces:

Cuando la recta no tiene soporte material se cuenta sobre la sucesión numérica de a en a, hasta hacer n veces ese recuento. Esta destreza se ha estimulado con trabajo previo sobre recuentos en la recta de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc.

El esquema de la división es similar; consiste en contar hacia atrás desde el dividendo, y de tanto en tanto, según indique el divisor. El número de pasos dados es el cociente. En este caso se cambia el modelo usual de la división, ya que el divisor no es ahora el número de partes que se hacen, sino la cantidad igual a que toca cada parte. Si el divisor es pequeño, 2 ó 3, puede intentarse con el modelo de la línea numérica, su división en las partes iguales correspondientes, sin cambiar así los papeles del divisor y cociente. Pero la utilización más sencilla de este modelo es como resta reiterada y contando hacia atrás, y no tanteando los puntos en los que la longitud total del dividendo queda partida en partes iguales.

Modelos cardinales

La segunda familia de modelos utiliza el contexto cardinal para representar uno o los dos factores. Entre los tipos más utilizados tenemos:

- La unión repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos
- La distribución de objetos en un esquema rectangular. Para ello se hace una fila con tantos objetos como nos indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador. En este modelo cada uno de los factores se puede reconocer en la representación
- Más formalizado que el caso anterior es la representación mediante producto cartesiano de dos conjuntos. Así el producto 2 x 3 se puede representar tomando un conjunto de 2 blusas y otro de 3 pantalones, y formar todos los pares ordenados de blusa y pantalón, normalmente mediante un cuadro de doble entrada. El total de pares ordenados nos da el resultado del producto 2 x 3
- La otra forma convencional de representar un producto utilizando conjuntos es mediante un diagrama de flechas. Se dibujan tantas flechas como puedan trazarse desde un conjunto al otro conjunto. Por ejemplo, de un conjunto de 2 elementos a otro de 3 elementos nos da el producto 2 x 3

En el caso de la división el modelo más usual es el de repartir en partes iguales. Se tiene un conjunto con 12 elementos y se abren a partir de él 3 subconjuntos. Hay que repartir los elementos iniciales a partes iguales entre los tres subconjuntos, lo que toca a cada parte es el cociente.

También se puede utilizar el modelo inverso: sobre el conjunto de 12 elementos, se van haciendo subconjuntos de 3 elementos hasta que todos quedan distribuidos. En este caso el divisor es la cantidad que toca a cada parte y el cociente el número de partes. Este modelo y el anterior son iguales de sencillos de realizar, e incluso en este segundo caso se necesita una representación menos complicada. Sin embargo la idea intuitiva de reparto en partes iguales parece quedar mejor expresada en el primer caso que en el segundo.

La distribución rectangular de un total de elementos, dados por el dividendo, en tantas filas (o columnas) iguales como indique el divisor es otro modelo adecuado. El cociente se determina contando el número de columnas (o filas) obtenidas. En cada uno de estos casos los elementos sobrantes en el reparto o distribución dan el resto de la división.

Modelos con medida

Las regletas de Cuisenaire nos proporcionan un modelo adecuado del número como longitud. Para realizar un producto con regletas 2 x 3, por ejemplo, se toman las regletas 2 y 3 respectivamente y se colocan en cruz y a continuación se toman tantas regletas abajo como indique la longitud de arriba, en este caso se toman dos regletas de tres, y ya podemos prescindir de la regleta superior cuya función era indicar cuantas de tres había que tomar. El resto del proceso es el conocido: realizar la suma de las dos regletas de tres.

- Con la balanza utilizamos el contexto número/medida/peso
- Realizar un producto consiste en colocar tantas veces una unidad de peso indicada (multiplicando) como veces nos indique otro número (multiplicador)
- El resultado es el peso global en el otro platillo para equilibrar la balanza

La división con estos dos materiales resulta muy sencilla. Consiste en establecer la equivalencia entre una longitud o peso global (dividendo) y otro más pequeño (divisor) que hay que reiterar varias veces hasta conseguir dicho equilibrio. El número de veces en ambos casos se obtiene contando y nos da el cociente.

Modelos numéricos

Un cuarto tipo de modelos aparece cuando se considera en contexto estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados. En este caso el producto es una suma reiterada 3 x 4 = 3 veces 4 = 4 + 4 + 4. Esta idea subyace a muchos de los modelos en los que se emplea material o representaciones gráficas.

La división se interpreta como una resta reiterada 12: 4 consiste en ver cuantas veces puede restarse 4 de 12, hasta llegar a 0, así:

$$12 - 4 = 8$$

$$8 - 4 = 4$$

$$4 - 4 = 0$$

de esta manera hemos conseguido restar 3 veces 4 de 12, luego 12: 4 = 3.

Pero también puede interpretarse como suma. En un problema propuesto por nosotros a alumnos de 6º Nivel que decía: "Queremos repartir 2.000 Ptas. en monedas de 100 Ptas., ¿cuántas monedas necesitaremos?" muchos niños hicieron sumas de sumandos 100 hasta alcanzar 2.000.

Modelos de razón aritmética

Hay un quinto tipo de modelos en los que se abre un amplio campo de aplicaciones a la estructura multiplicativa. Se trata de los modelos de razón o comparación. En ellos hay que realizar la comparación de dos conjuntos, o dos cantidades, en términos de "cuantas veces más". El caso más sencillo se da al comparar dos conjuntos disjuntos de objetos discretos. Una técnica usual de comparación es establecer una correspondencia de varios a uno que nos da el factor de conversión o comparación.

Dentro de esta misma clase de modelos de razón podemos considerar el que se fundamenta en la semejanza de triángulos y que puede utilizarse con dos líneas numéricas convergentes. Si queremos realizar el producto 3 x 4 tomamos sobre una de las rectas, por ejemplo, la horizontal, el valor 3. Sobre la otra señalamos el punto 1, que unimos mediante trazo con el 3 anterior. Sobre la segunda recta señalamos también el punto 4 y trazamos por él una paralela a la que se trazó. El punto de corte con la recta horizontal señala el resultado del producto. El Teorema de Thales nos justifica este resultado.

Modelos funcionales

Finalmente, nos queda una quinta familia de modelos: se trata de todos aquellos casos en los que el producto aparece con carácter de función u operador. De nuevo el caso más sencillo consiste en considerar cada operación como una máquina-operador que transforma números-estados en números-estados. Así:

$$3 \longrightarrow \boxed{\text{x4}} \longrightarrow 12$$

estado inicial	operador	estado final

o bien:

$$12 \longrightarrow \boxed{:4} \longrightarrow 3$$

estado inicial	operador	estado final

Se suele decir que cada máquina es inversa de la otra.

LA TABLA DE MULTIPLICAR

El aprendizaje de la multiplicación debe llevar a la construcción de la tabla de multiplicar. Para ello se va trabajando sistemáticamente con todos los productos que tienen el mismo multiplicador, comenzando a partir del 2: desde 2 x 1 hasta 2 x 9. Al principio no se utiliza el símbolo x o el ., sino el término “veces”, que progresivamente se irá sustituyendo por el símbolo. Sea cual sea el modelo elegido para elaborar el concepto de producto sí conviene utilizar la suma reiterada como algoritmo adecuado para alcanzar el resultado. En este sentido se va construyendo una tabla con todos los resultados obtenidos con un mismo multiplicador al variar el multiplicando. Así se construye la tabla de cada número.

A partir de la tabla del 5 conviene ir comprobando que el producto es conmutativo, es decir, se debe verificar en cada caso que n veces k da el mismo resultado que k veces n. Conforme se avanza en la tabla este resultado va teniendo mayor utilidad. Se incorporan a partir de aquí los productos con multiplicando 0 y 1, lo cual justifica posteriormente, junto con la conmutatividad, que se construyan las tablas del 0 y del 1, para las que el niño no encuentra dificultad.

Se debe dedicar un curso completo a la construcción de la tabla de multiplicar y a su empleo en la resolución de todo tipo de problemas. No debe importar que los datos numéricos sean pequeños, lo realmente importante es la comprensión de todas las relaciones que pueden expresarse mediante la estructura multiplicativa y la variedad de significados –variables semánticas– con las que dichas relaciones pueden expresarse. Al igual que con la suma y resta, no existen combinaciones más sencillas para el producto, salvo la regla general que aumenta la dificultad conforme aumentan los factores. Por razones obvias resultan más fáciles de memorizar las tablas de 5 y 10.

La tabla de multiplicar, una vez construida, se olvida. Por ello al curso siguiente conviene recordarle al niño de nuevo cuáles son los significados más usuales del producto y cómo se construye la tabla. A partir de ahí debe irse exigiendo cierto grado de memorización en el que se combinen la fijación de algunos datos, y el uso de la estructura interna de relaciones entre la totalidad de ellos. Carece de todo sentido el exigir una memorización mecánica total de la tabla. El énfasis no hay que ponerlo en la repetición sino en la comprensión. Aún así, conviene que el alumno recuerde el mayor número posible de resultados o al menos sepa cómo obtenerlos.

INICIACIÓN A LA DIVISIÓN

El aprendizaje de la división debe ir en simultáneo con el de la multiplicación. Su mayor dificultad se encuentra en el doble papel que puede representar el divisor en los diferentes modelos: número de partes en las que se divide la cantidad inicial o bien cantidad fija que sirve para ir formando las diferentes partes en las que se divide la cantidad total.

Hay que decir que, a diferencia del aprendizaje de su algoritmo, los casos simples de división resultan sencillos y los diferentes modelos llegan a manejarse con soltura. La dificultad real de la división aparece en la mecanización de su algoritmo y en el paso a conceptos más elaborados como los de fracción, razón y número racional, que el alumno estudiará más adelante.

ELABORACIÓN DE LA TABLA DE MULTIPLICAR

La tabla de multiplicar es más utilizada que la de la suma y a veces el niño ha de recurrir a ella si no la ha memorizado suficientemente. De forma análoga a la tabla de la suma vamos a elaborar la tabla de multiplicar.

Se hace una tabla de doble entrada colocando en la primera fila y en la primera columna los números de 1 a 9 ordenadamente (prescindimos del número 0 pues creemos que de todos es conocido que el producto de un número por 0 siempre es 0). Se rellena toda la tabla de forma ordenada bien por filas o bien por columnas, siguiendo el siguiente criterio: al continuar una fila (o columna) se escribe el mismo número que aparece en su cabecera y se continuará contando (o añadiendo) a "saltos" iguales a los que indique dicho número, por ejemplo, si tratamos de rellenar la fila encabezada por dos escribimos dos en el cuadro siguiente y los restantes los rellenamos contando de dos en dos (o sumando dos cada vez).

Para conocer el producto de dos números menores que 10 se buscará el número colocado en el punto de encuentro de la fila y la columna encabezadas por los dos factores que componen el producto. El producto de números mayores que 10 se regirá además por las leyes del algoritmo.

La tabla permite conocer el cociente entero de dos números cuando un de ellos es divisor del otro. Hay que buscar el dividendo en el interior de la tabla de manera que el número que encabeza la fila coincida con el divisor, el cociente es el número que encabeza la columna.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	45	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA COMO CAMPO CONCEPTUAL

En los últimos años, ha surgido un gran interés en realizar análisis teóricos de la estructura multiplicativa y en investigar la adquisición de los conceptos y relaciones de tipo multiplicativo por parte de los escolares de Enseñanza Primaria.

Tal como se utiliza en la investigación educativa el concepto de estructura multiplicativa no es un concepto indefinido, aunque no siempre se utiliza con el mismo significado. El autor que ha utilizado el concepto de estructura multiplicativa con un significado más extenso ha sido Vergnaud (1983, 1988).

Como resultado de análisis teóricos Vergnaud define la noción de *campo conceptual*.

> *Un campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones-problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión.* (Vergnaud, 1981).

Centra su interés fundamentalmente en dos campos conceptuales "la estructura aditiva" y "la estructura multiplicativa" "considerados como conjunto de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (tales como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza)" (Vergnaud, 1983).

La estructura multiplicativa se basa en la aditiva, pero hay aspectos intrínsecos de la estructura multiplicativa no reductibles a aspectos aditivos y estos son los propios de la estructura multiplicativa. Caracteriza el campo conceptual de la estructura multiplicativa como un conjunto de situaciones problema cuya resolución requiere la multiplicación o la división y las clasifica en tres categorías: proporción simple, producto de medidas, y proporción múltiple. El desarrollo de la comprensión de este campo conceptual abarcaría, según él, desde los 7 a los 18 años.

CLASES DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

El análisis que hace Vergnaud (1983) de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división muestra que los problemas "simples" de este tipo se sitúan casi siempre en el marco de dos grandes categorías:

- Categoría *isomorfismo de medida*
- Categoría *producto de medida*

La otra gran estructura que considera Vergnaud la *proporción múltiple* se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son por tanto problemas compuestos en los que para su resolución hay que emplear más de una operación. En este trabajo no analizamos este último tipo de problemas.

El isomorfismo de medidas

El isomorfismo de medidas es una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. En ella se incluyen los clásicos problemas tipo referidos a: *repartos iguales* (personas y objetos), *precios constantes* (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad), densidades constantes a lo largo de una línea (árboles y distancias), en una superficie o en un volumen. Para representar de forma cómoda esta estructura Vergnaud utiliza las tablas de correspondencia:

$$\begin{array}{lcl} M_1 & \text{———} & M_2 \\ \hline x & \text{———} & y = f(x) \\ & \cdots & \\ x' & \text{———} & y' = f(x') \end{array}$$

en las que la función $f: M_1 \to M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2.

Vergnaud (1983) identifica cuatro grandes subclases de problemas dentro de la estructura de isomorfismo de medidas: una subclase multiplicación, dos subclases de división y una cuarta subclase que llama problemas generales de regla de tres. Estas subclases las analiza desde dos puntos de vista.

Subclase de multiplicación
Esta subclase de problemas responde al esquema específico

$$\begin{array}{lcl} M_1 & \text{———} & M_2 \\ \hline 1 & \text{———} & a \\ & \cdots & \\ b & \text{———} & x \end{array}$$

Ejemplo: Juan compra 6 caramelos al precio de 12 pesetas cada uno, ¿cuánto tiene que pagar?.

$a = 12$, $b = 6$, M_1 = [número de caramelos], M_2 = [pesetas].

Subclase de división: Primer tipo
El primer tipo de la subclase división corresponde al esquema a

$$\begin{array}{lcl} M_1 & \text{———} & M_2 \\ \hline 1 & \text{———} & x = f(1) \\ & \cdots & \\ a & \text{———} & b = f(a) \end{array}$$

y consiste en hallar el valor unidad f(1) conociendo "a" y f(a).

Ejemplo: Elena quiere repartir sus caramelos con María y Carmen en partes iguales. Su madre le da 12 caramelos, ¿cuántos caramelos recibirá cada una?

$$a = 3,\ b = 12,\ M_1 = [\text{n}^{\text{o}} \text{ de niñas}],\ M_2 = [\text{n}^{\text{o}} \text{ de caramelos}]$$

Subclase división: Segundo tipo

El segundo tipo de problema de división queda reflejado en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \text{———} & M_2 \\ \hline 1 & \text{———} & a = f(1) \\ & \cdots & \\ x & \text{———} & b = f(x) \end{array}$$

y consiste en hallar x conociendo f(x) y f(1).

Ejemplo: Juan tiene 1500 ptas. y quiere comprar juegos de ordenador. Cada uno de ellos cuesta 300 ptas., ¿cuántos juegos puede comprar?

$$a = 300,\ b = 1500,\ M_1 = [\text{n}^{\text{o}} \text{ de juegos}],\ M_2 = [\text{coste}].$$

Problemas de regla de tres: Caso general

El caso general de los problemas de regla de tres viene esquematizado por

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \text{———} & M_2 \\ \hline a & \text{———} & b \\ & \cdots & \\ c & \text{———} & x \end{array}$$

En estos problemas intervienen tres datos a, b, c; por tanto, no son problemas simples de estructura multiplicativa. Vergnaud los utiliza para hacer constar al respecto que:

> *debería quedar ya claro que los problemas de multiplicación y división son casos simples de los problemas más generales de regla de tres y se distinguen de estos en que uno de los cuatro términos implicados es igual a uno.* (Vergnaud, 1983).

El producto de medidas

El producto de medidas es una estructura que engloba a tres magnitudes M_1, M_2 y M_3, de tal manera que una de ellas, M_3 es el producto cartesiano de las otras dos

$$M_1 \text{ x } M_2 = M_3$$

Esta estructura describe un buen número de problemas relativos a áreas, volúmenes, y a productos cartesianos de conjuntos discretos. Su forma general es una relación ternaria entre tres cantidades una de las cuales está definida como un par ordenado cuyas componentes son las otras dos cantidades. Por ello la forma más natural de representar esta relación ternaria es mediante una representación cartesiana.

Dentro de la estructura producto de medidas se pueden distinguir dos subtipos de problemas.

Multiplicación

En estos problemas se debe encontrar la medida producto, conocidas las medidas que lo componen. Por ejemplo, ¿cuál es el área de una habitación rectangular que mide 5 metros de largo por 3 metros de ancho?

$$M_1 = [\text{largo}]\ M_2 = [\text{ancho}]\ M_1 \text{ x } M_2 = [\text{área}]$$

División

En estos problemas se debe encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta. Por ejemplo, la superficie de una habitación rectangular es de 24 metros cuadrados y el largo de la habitación es de 6 metros, ¿cuál es el ancho de la habitación que responde a las mismas magnitudes del problema anterior?

En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas se pueden distinguir subclases de problemas sin más que considerar el tipo de magnitud elemental implicado: discreta, continua; el tipo de números: enteros, decimales, números grandes, números inferiores a 1, y también teniendo en cuenta los conceptos implicados.

ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA Y SIMETRÍA

La distinción que hace Vergnaud entre isomorfismo de medidas y producto de medidas la expresan Bell y otros (1989) en función de si el producto es o no simétrico. En el producto de medidas, (por ejemplo, en los problemas de áreas) las dos cantidades elementales (el largo y el ancho) juegan el mismo papel y pueden ser intercambiadas. En este caso Bell y colaboradores consideran que el producto puede ser denominado simétrico. Sin embargo, en el isomorfismo de medidas las dos cantidades que aparecen como datos en el problema desempeñan papeles distintos. Por ejemplo, si tenemos 3 cajas y cada una contiene 4 lápices, la estructura consiste en repetir 3 veces un conjunto de 4 objetos, o 4+4+4; y según este grupo de investigadores no tiene sentido expresar esta estructura como 4 lotes de 3 elementos. En este caso dicen que la multiplicación es asimétrica. Otro ejemplo, lo constituirían los problemas de velocidad y tiempo empleado. En estos problemas uno de los datos actúa como multiplicando y el otro como multiplicador, pero no son intercambiables.

Bell y otros (1989) estudian sólo problemas multiplicativos asimétricos y hacen previamente una clasificación de ellos en siete categorías, que hemos recogido en la siguiente tabla.

Clasificación de los problemas multiplicativos asimétricos según Bell y otros (1989)	
Estructura	Problema Multiplicativo
Grupos múltiples	Hay 3 cartones de huevos a 6 huevos cada uno. ¿Cuántos huevos hay en total?
Medida repetida	Un sastre necesita 3 piezas de tela de 4.6 metros de largo. ¿Cuánta tela comprará?
Razón (Tasa)	Un hombre camina a la velocidad de 4.6 kms/h durante 3.2 horas. ¿Cuánto caminará?
Cambio de tamaño (la misma unidad)	Una fotografía se amplia según el factor 4.6. Si la altura original era 5.2 centímetros, ¿cuánto medirá la altura de la fotografía ampliada?
Cambio de tamaño (unidades distintas)	La maqueta de un bote está hecha a escala de 4.6 metros por pulgada. Si la maqueta es de 5.2 centímetros de larga, ¿cuál es la longitud del bote?

Clasificación de los problemas multiplicativos asimétricos según Bell y otros (1989)	
Mezcla (con la misma unidad)	Un pintor obtiene un determinado color usando 4.6 veces más rojo que amarillo. ¿Cuánta pintura roja necesitará para obtener 3.2 litros de amarillo?
Mezcla (unidades distintas)	Se mezclan 4.6 gramos de polvo por litro de agua. ¿Cuántas gramos se necesitarán para mezclar con 3.2 litros?

A cada tipo de problema de multiplicar de la tabla anterior, Bell y otros (1989) consideran que hay asociados dos tipos de problemas de dividir. Un tipo corresponde a la división como partición, en el que se dan la cantidad total y el número de partes, hay que hallar el tamaño de cada parte; y el segundo tipo de problemas de división cuotición, en el que se dan como datos el total y el tamaño de cada parte, debiéndose hallar el número de partes.

ENFOQUE DE ESTRUCTURA DE CANTIDADES

Schwartz (1988) resume los supuestos de este enfoque teórico. En los párrafos siguientes se presentan.

Apuesta por la matemática como una actividad de modelización y piensa que los problemas aritméticos contribuyen a proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas analíticas con las que comprender mejor el mundo en que vive. En esta concepción de la matemática como una actividad de modelización juega un papel fundamental la interpretación física del entorno modelizado y como consecuencia las cualidades físicas de ese entorno a las que llamamos magnitudes.

Las cantidades usadas en matemáticas se derivan de las acciones de *contar* y de *medir*, dependiendo de que estemos cuantificando propiedades continuas o discretas del entorno. Alternativamente, pueden ser derivadas de contar o medir cantidades por la sucesiva aplicación de operaciones matemáticas que estén definidas. Todas las cantidades que surgen en el curso de medir, o en el subsecuente cálculo con estas cantidades, tienen unidades de referencia y Schwartz se refiere a ellas como *cantidades adjetivadas*. Un axioma de este enfoque es que esta unión entre números y sus unidades de referencia es un componente esencial de las matemáticas usadas para el propósito de modelizar.

En el conjunto de las cantidades resultantes de contar o medir es posible definir un conjunto básico de operaciones binarias. Estas operaciones pueden ser usadas para generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevas unidades de medida. La composición de dos cantidades matemáticas para producir una tercera cantidad derivada puede tomar cualquiera de las dos formas, *composición conservando el referente* o *composición transformando el referente*.

La composición de dos cantidades similares para producir una tercera del mismo tipo es fundamentalmente la manera de componer cantidades que las operaciones aritméticas de adición y sustracción proporcionan. Tales composiciones se refieren como composición preservando el referente.

La composición de dos cantidades, similares o no, para producir una tercera cantidad que es, en general, no similar a las dos cantidades originales se conoce como composición transformando el referente. La multiplicación y la división son composiciones que transforman el referente.

Las composiciones que transforman el referente obligan a distinguir entre dos tipos de cantidades en cierto modo diferentes, cantidades *extensivas* y cantidades *intensivas* (Schwartz, 1988, p. 41). Las cantidades que aparecen en los problemas de estructura multiplicativa pueden ser extensivas o intensivas. Las cantidades extensivas se pueden clasificar en discretas (D) y continuas (C) y puesto que, en general, las intensivas son el cociente indicado de dos extensivas, podemos clasificarlas en los cuatro tipos siguientes: D/D, C/D, D/C, C/C.

Los enunciados de los problemas de estructura multiplicativa simples contienen dos cantidades conocidas, los datos, y una cantidad por hallar. Cada una de ellas puede ser de uno de los tipos citados. Pero este aspecto es secundario en la clasificación que hace Schwartz. El aspecto fundamental es la distinción entre cantidades extensivas y cantidades intensivas. A partir de ella establece tres tipos de ternas de cantidades que corresponden a categorías distintas de problemas:

Problemas asociados a la terna (I, E, E'). Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas. Hay tres tipos de problemas asociados a esta terna:

$$I \times E = E' \quad E'/E = I \quad E'/I = E$$

Problemas asociados a la terna (E, E', E"). Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama *producto de medidas*. A esta terna corresponde el problema IxE=E" y las divisiones asociadas:

$$E''/E = E' \text{ o } E''/E' = E.$$

Problemas asociados a la terna (I, I', I"). A esta terna corresponde el problema IxI' = I" y las divisiones asociadas.

ENFOQUE TEXTUAL

Para Nesher (1988), los análisis tanto de Vergnaud como de Schwartz se apoyan en el concepto físico de análisis dimensional. La diferencia entre ellos consiste en que Schwartz considera que en la estructura multiplicativa hay una relación entre tres cantidades mientras que Vergnaud considera que la relación es cuaternaria. Nesher se sitúa en una perspectiva lingüística y, al igual que hizo con los problemas de estructura aditiva (Nesher y Katriel, 1977), en primer lugar formula las condiciones lógicas de los textos correspondientes a los problemas de multiplicar o dividir, para buscar después las relaciones semánticas entre las proposiciones subyacentes en el texto.

Distingue tres grandes categorías de PAEV de estructura multiplicativa.

Problemas que denomina *"mapping rule"*

Se corresponden con los problemas que Vergnaud denomina "isomorfismo de medidas" y con el tipo I x E = E' de Schwartz. En esta categoría considera dos subtipos: problemas de multiplicación y de división. En los problemas de división considera dos tipos: *cuotitivos y partitivos.*

Problemas de *comparación multiplicativa*

No están contemplados como categoría independiente en el análisis de Vergnaud (que los engloba como isomorfismo de medidas) ni en el de Schwartz (que los engloba en el tipo I x E' = E"). Brown (1981) los llama problemas de "factor multiplicativo", Bell y otros (1989) los denominan "cambio de tamaño con la misma unidad", y Brekke (1991) los emplea como "problemas de factor escalar" (scale factor problems). Los ejemplifica con el siguiente problema:

- Dan tiene 5 canicas
- Ruth tiene 4 veces tantas canicas como Dan
- ¿Cuántas canicas tiene Ruth?

En el que cada una de las oraciones expresa lo siguiente: en la primera línea dice que hay un conjunto referente que contiene n objetos "y" (Dan tiene 5 canicas); en la segunda línea dice que hay una función específica que aplica cada elemento "y" del conjunto referente en un conjunto comparado de objetos "x" (por cada canica de Dan, hay exactamente 4 canicas de Ruth); y en la tercera línea, en la que se enuncia la cuestión del problema, pregunta cuántos objetos "x" hay en el conjunto comparado (¿Cuántas canicas tiene Ruth?).

Problemas de *multiplicación cartesiana*

Están incluidos en la categoría "producto de medidas" de Vergnaud y en la categoría E x E' = E'' de Schwartz, y son considerados como problemas simétricos por Bell y otros (1989).

MODELOS IMPLÍCITOS

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) proponen una teoría, basada en modelos implícitos para explicar las respuestas de los niños cuando resuelven problemas verbales simples de multiplicar o dividir. Según esta teoría, el modelo primitivo asociado con la multiplicación es el de adición repetida, en el cual un número de conjuntos de igual tamaño se ponen juntos. Simbólicamente bajo la interpretación de adición repetida, 3 x 4 significa 4 + 4 + 4 ó 3 + 3 + 3 + 3, según cual sea el factor que se considera como operador (número de conjuntos) y cual como operando (número de objetos en cada conjunto). El modelo de adición repetida no es conmutativo y el multiplicador y el multiplicando juegan papeles diferentes, y como consecuencia de ello, este modelo de multiplicación lleva asociados dos modelos de división: división partitiva y división cuotitiva.

En la división partitiva un conjunto de objetos se divide en un número de partes iguales. La finalidad es obtener la cantidad que corresponde a cada parte. En la división cuotitiva se trata de determinar cuántas partes del mismo tamaño podemos formar de un conjunto dado. Si el cociente es un número entero, este modelo se corresponde con una substracción repetida.

Fischbein y otros sostienen la hipótesis de que estos son los dos modelos implícitos en la resolución de problemas verbales de división pero los resultados les llevan a la conclusión de que "hay solamente un modelo primitivo intuitivo para los problemas de división –el modelo partitivo". Y que "Con la instrucción, los niños adquieren un segundo modelo intuitivo –el modelo cuotitivo".

ERRORES ASOCIADOS A LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Los problemas verbales que incluyen multiplicación y división son difíciles de resolver por los niños, algunas de estas dificultades se deben a la comprensión limitada que tienen de estas operaciones aritméticas y su poca experiencia con los distintos tipos de situaciones que exigen utilizar estas operaciones. Por otra parte hemos visto la gran variedad de situaciones que dan lugar a estos problemas y la dificultad, de hacer una clasificación de las mismas, como se desprende de las distintas clasificaciones realizadas.

En muchas ocasiones se señala que la comprensión del significado de la multiplicación y de la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción, una explicación a este fenómeno se da en términos de las palabras que comúnmente se asocian a los signos de las operaciones; así:

+ significa "sumar", "añadir" o "y"
- significa "restar", o "quitar"
: significa "repartir"
x significa "tantas veces"

Mientras que añadir, quitar y repartir son acciones concretas y fáciles de visualizar, no ocurre lo mismo con tantas veces que no presenta una referencia activa tan clara.

Señalan Dikson y col. que en una experiencia realizada por Brown (1981) se les pidió a niños de 11 años que inventaran una historia que justificase una serie de operaciones. Las respuestas quedan recogidas a continuación:

operación	porcentajes de éxitos
84 - 28	77
9 : 3	60
84 : 28	42
9 x 3	45
84 x 28	31

A su vez tenían que elegir la expresión que correspondía a una situación dada a través de una historia, los resultados de esta tarea fueron los siguientes:

operación	porcentaje de éxitos
+	88
-	67
:	63
x	53

El orden de dificultad de las operaciones resultó el mismo en ambas situaciones. Los resultados correspondientes a adición y sustracción fueron más altos que los correspondientes a multiplicación y división. Por otra parte la dificultad de la división se manifiesta inferior a la de la multiplicación.

Fischbein y col. argumentan que los errores que aparecen en la resolución de problemas de estructura multiplicativa pueden ser consecuencia de considerar en la enseñanza como modelo único para la multiplicación la suma repetida y el modelo de partición para la división. Por lo que aconseja el trabajo en todos los tipos de problemas asociados a esta estructura.

4
Trabajo con patrones

INTRODUCCIÓN

Una línea de investigación fecunda para la educación matemática, que ha permitido una colaboración estrecha con los psicólogos, ha consistido en el estudio de las representaciones mentales en el aprendizaje de las matemáticas (Resnick, L.; Ford, W.; 1990).

La importancia de representaciones sencillas matemáticamente correctas, como base para la comprensión de conceptos matemáticos complejos, ha sido una idea destacada tanto por psicólogos guestaltistas (Wertheimer, 1991) como, posteriormente, por psicólogos cognitivos (Bruner, 1984).

El uso de modelos físicos para presentar de manera útil determinados conceptos matemáticos, como las regletas de Cuisenaire, los ábacos o los bloque multibásicos de Dienes, ha sido objeto de estudios e investigaciones; igualmente ha formado parte de manera sistemática de innovaciones curriculares y diseño de actividades para el aula. Un aspecto esencial de estos estudios ha consistido en establecer el papel de las representaciones físicas que permiten una manipulación directa, que pueden emplearse como metáforas de conceptos y procedimientos matemáticos, y que pueden ayudar en su comprensión.

Estos materiales han desempeñado y desempeñan un papel importante en la comprensión de los primeros conceptos aritméticos; y se raciones puntuales. Las relaciones numéricas consideradas son las propias de las estructuras aditiva y multiplicativa.

CONCEPTOS A UTILIZAR

Modelo

La definición de modelo como "esquematización construida con una multiplicidad de datos de la experiencia (de la realidad) que proporciona una abstracción satisfactoria de como funcionan las cosas" se complementa con esta otra definición, en términos matemáticos, dada por Fischbein:

> *Un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y viceversa.*

Un modelo ofrece al usuario (generalmente resolutor de un problema) un sustituto del original el cual por sus cualidades, está mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original. Pensamos mejor con lo perceptible, lo manipulable prácticamente, lo familiar, que con lo abstracto, no representable, desconocido. Esto hace de un modelo un poderoso instrumento mental, especialmente apto para la comprensión de las estructuras de la realidad, cuando su complejidad no nos permite alcanzar y representar directamente sus múltiples relaciones de conexión, y también para lograr un control directo del significado de los hechos.

La utilidad general de un modelo es doble: por una parte facilitar la interpretación de hechos y por otra ayudar a resolver los problemas de acuerdo con los hechos originales. Esto hace que el uso de modelos deba potenciarse en la enseñanza pues se trata de una herramienta esencialmente heurística. En este caso, el problema a resolver, se traslada a los términos específicos del modelo y a través de este se debe encontrar la solución usando sólo sus propias reglas y elementos.

El modelo deberá codificar los datos del original (sus propiedades, procesos y relaciones) en sus propios términos que son específicos e in-

Para algunos autores lo característico del hombre y que le ha dado mucho poder es su capacidad destacada de simbolización, que comienza con la palabra y que termina en una simbolización general de todos los modos de tratamiento humano de las cosas. En el uso inteligente de los símbolos el hombre los utiliza en lugar de objetos, preocupándose de que las manipulaciones de los símbolos puedan trasladarse en todo momento a manipulaciones sobre los objetos.

Los símbolos que han sido conectados con ideas pueden ser usados para pensar sobre los conceptos que representan. Uno de los hechos más potentes de la matemática es la facilidad con que pueden ser manipuladas ideas complejas a través de símbolos. Un sistema de símbolos matemáticos constituye un lenguaje específico de la materia que tiene como funciones principales las siguientes de acuerdo con Skemp:

Facilitar la comunicación. Dado que los conceptos son objetos puramente mentales y no hay forma de observar directamente el contenido de la mente es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. El símbolo es un medio visible que está conectado a una idea esta idea el significado del símbolo.

Registrar el conocimiento. Entre las características de las ideas están el ser invisibles inaudibles y perecederas, esto hace necesario un registro de las mismas que asegure la comunicación.

Formación de clasificaciones múltiples correctas. Un mismo objeto se puede clasificar de múltiples formas. Por la asignación de un símbolo a la clasificación somos capaces de concentrar nuestra atención sobre propiedades diferentes del mismo objeto. Cuantos más símbolos se puedan ligar a una objeto mayor será el número de clasificaciones en que pueda intervenir el mismo.

Hacer posible la actividad reflexiva. Por esta actividad se llega ser conscientes de los propios conceptos y esquemas; percibir sus relaciones y estructuras y llegar a manipular todo esto de diversas maneras. El hacer que una idea se haga consciente parece estar conectada estrechamente con su asociación a un símbolo.

Ayudar a mostrar las estructuras. Por la reflexión somos conscientes de nuestras ideas y la relación que existe entre ellas. La selección correcta

"Las computadoras son a las matemáticas como el telescopio o el microscopio es a la ciencia" (Steen). Gracias a las computadoras se han descubierto patrones que han permitido el avance de la Ciencia Matemática.

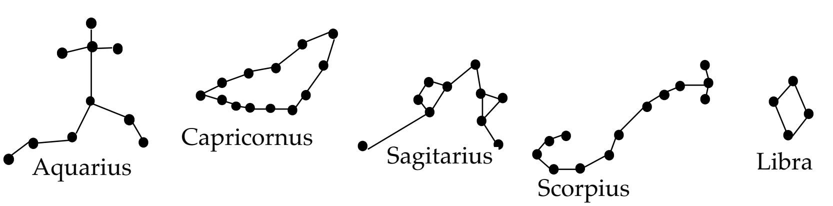
La importancia del uso de patrones en la enseñanza escolar se pone de manifiesto por dos hechos relevantes. Por un lado, el mundo en que vivimos está lleno de patrones y regularidades. Por otro, los patrones abundan en matemáticas, y la habilidad para reconocer patrones matemáticos puede ayudar a llegar intuitivamente a fórmulas y relaciones que pueden ser usadas en posteriores estudios de matemáticas.

El trabajo matemático con patrones en los primeros niveles educativos se puede desarrollar de dos formas diferentes. Reconociendo colecciones que presentan alguna semejanza y reconociendo y ordenando secuencias de objetos de acuerdo con una regularidad. El reconocimiento de patrones lleva implícitos muchos otros conceptos como identificación de forma, color, tamaño, dirección, orientación o relaciones numéricas. Crear y reconocer patrones es una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos, sobre todo en aquellos casos en los que las cuestiones pueden ser resueltas examinando casos especiales organizando a continuación los datos sistemáticamente determinando un patrón y usándolo para obtener la respuesta. Por ejemplo en el caso de hacer generalizaciones en problemas que entrañan patrones de tipo lineal o cuadrático en sus generalizaciones a través de expresiones algebraicas.

Consideramos que estos factores justifican la importancia del trabajo con patrones de los escolares y que debe de ser parte integrante del currículo de Matemáticas.

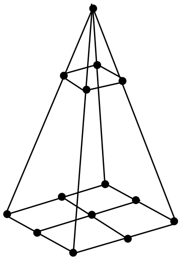
Configuración puntual

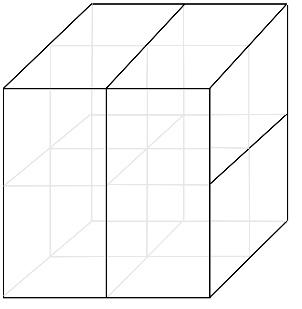
Se llama así a una colección de puntos colocados con cierta intencionalidad. Ejemplo: Grupos de puntos dispuestos en la misma forma que las constelaciones.



Número piramidal

De igual manera, **piramidal** es aquel número cuyos puntos se pueden disponer en forma de pirámide, **cúbico** es el que admite una forma de cubo.





De estas precisiones se desprenden las siguientes consideraciones:

- Cualquier número natural admite una representación como configuración puntual
- Para varios números, siempre podremos encontrar un patrón de formación tal que se vea la relación existente entre ellos
- Números figurados sólo lo serán aquellos que admitan una representación puntual en forma de figura, fundamentalmente geométrica
- Números poligonales son aquellos que admiten una representación en forma de polígono
- Igualmente se pueden definir los números piramidales y los cubos

Centramos nuestra atención en los números triangulares y cuadrados para hacer algunas consideraciones e iremos poniendo de manifiesto los patrones tanto geométricos como aritméticos que presentan en su formación.

Números triangulares

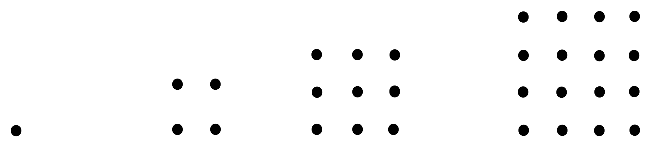
Los números triangulares reciben su nombre del hecho de presentar una configuración puntual en forma de triángulo.

La construcción es de la siguiente forma:

- Se coloca una primera fila, donde solo se escribe el número uno, tantas veces como números triangulares queramos hallar
- Se forma la segunda línea con el criterio siguiente: en la primera columna se escribe un uno, en la segunda columna se escribe la suma de ese uno con el número que le va a quedar encima, el número de la tercera columna se forma sumando el obtenido en la segunda y el número que le va a quedar por encima y así sucesivamente
- Para formar la tercera fila se realiza el mismo procedimiento, la cual está formada por los números triangulares

Números cuadrados

Los números cuadrados se obtienen de contar los puntos que se pueden disponer en forma de tablero, o cuadrado.



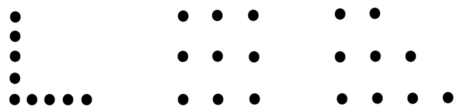
Los números cuadrados son por tanto los cuadrados perfectos.

1 4 9 16 25 36 o bien

$C_1 = 1,\quad C_2 = 4,\quad C_3 = 9,\quad C_4 = 16,\quad C_5 = 25,\quad C_6 = 36$

En esta secuencia numérica el patrón de formación es: sumar los números impares consecutivos, empezando en 1 que es el primer término.

Observando la figura descubrimos el patrón de formación de un cuadrado a partir de su anterior. Tomando el primero, se van añadiendo filas de puntos en forma de ángulo recto, las cuales contienen 3, 5, 7, 9, etc. puntos respectivamente, esta regla de formación y paso de un cuadrado al siguiente proporciona el patrón aritmético de sumas de sumandos impares consecutivos para obtener un número cuadrado.



En la primera "se ve" el siguiente desarrollo del número 9 = 4 + 1 + 4.

- Escribe el desarrollo del número 9 que ves en las otras dos representaciones

Tarea 2. El número 15 tiene varios desarrollos, por ejemplo:

$$15 = 3 + 5 + 7 \text{ y } 15 = 3 \text{ x} 5$$

- Escribe otros tres desarrollos distintos del número 15
- Realiza una representación puntual de 15 en donde se vea uno de los desarrollos anteriores

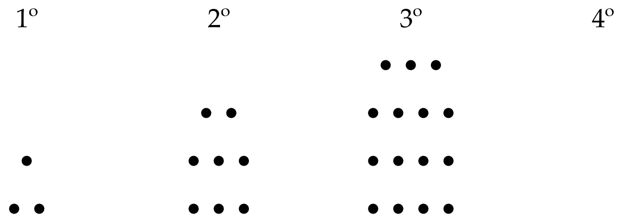
Tarea 3. En la siguiente tabla se presenta una secuencia de representaciones.

Representación	• • •	• • • • •	• • • • • • •
Número			
Expresión			

- Escribe a que números corresponden cada una de estas representaciones y el desarrollo de la expresión que indican

Tarea 4. En la siguiente tabla se presenta una secuencia de representaciones que no esta completa.

Representación	• • • •	• • • • • • • •	
Número			
Expresión			



- Dibuja el término siguiente
- Indica cómo es el de lugar n
- Escribe debajo de cada figura el número que representa
- Debajo de cada número escribe su desarrollo

Tarea 10. Tienes la siguiente secuencia:

1º	2º	3º	4º
1	1+2	1+2+3	1+2+3+4

- Escribe el 5º término
- Escribe el término enésimo
- Realiza una representación puntual de cada uno de los términos

Tarea 11. Dada la siguiente sucesión numérica: 2, 5, 8, 11...

- Realiza una representación puntual de los cuatro primeros términos
- Escribe su término general

Tarea 12. Desarrolla esta tarea de la siguiente manera:

- Inventa el término general de una sucesión
- Señala la propiedad común de sus términos
- Haz una representación puntual de los tres primeros términos

5
Referencias

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 132-144.

Baroody, A. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(*2), 141-157.

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor. M.E.C.

Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1987). *Números y operaciones*. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matematica, Universidad de Granada.

Carpenter, T.P., Moser, J. M. y Romberg T.A. (Eds.). (1982). *Adittion and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of estudents' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in mathematics Education, 19*(5) 385-301.

Dikson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor. M.E.C.

Donalson, M. (1987). *Children's Mind*. Fontana.

Fennema, E., y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grows, *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studes in Mathematics 8*, 153-165.

Fuson, K. (1980). The counting word sequence as a representational tool. En R. Karplus (Ed.), *Proceeding of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley.

Fucson, K. (1986). Theaching children to subtract by counting up. *Journal for Research in Mathematics Education 17*, 172-189.

Garzón, M., y Martinez, S. (??). *Una propuesta de trabajo: La práctica de los rincones con niños de 2 a 6 años*. Madrid: M.E.C.

Gelman, R., y Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hadas, R., y Bransky, J. (1991). Meanings of division and their implications for science teaching -a survey amongst elementary teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 22*(2), 309-315.

Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la Aritmética*. Madrid: Visor.

Lester, F. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Accquisition of Mathematics Concepts and Proceses*. Academic Press.

Lewis, A. B., y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology 79*, 363-371.

Mangan, C. (1989). Multiplication and division as models of situations: What research has to say to the teacher. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.), *New Directions in Mathematics Education*, 107-127.

Montessori, M. (1934). *Psico-Aritmética*. Barcelona: ARALUCE.

M.E.C. (1987). *Proyecto 0-6. Educación Infantil. Informe Piagetiano*. Madrid.

Nesher, P., y Katriel, T. (1977). A semantic analysis of adition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics 8*, 251-269.

Nesher, P. (1986). Learning Mathematics. A Cognitive Perspective. *American Psychologist, 41*(10), 114-122.

Piaget, J., y Szeminska, A. (1975). *Génesis del número en el niño*. Guadalupe. Buenos Aires.

Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Ensayo. Seix Barral.

Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking.* Nueva York: Academic Press.

Resnik, L., y Ford, W. (1990). *La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós. M.E.C.

Riley, M., Greeno, J., Heller, J. (1983). Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. Nueva York: Academic Press.

Schaeffer, B., y Eggleston, J. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psicology* 6, 357-379.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research program in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan.

Skemp, R. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Steen, L. 1988. The Science of Patterns. *Science. 240*, 611-616.

Thompson, C., y Hendrickson, A. (1986). Verbal addition and subtraction problems: Some difficulties and some solutions. *Arithmetic Teacher.* March, 21-25.

Van de Valle, J. (1988). The early development of number relations.*Arithmetic Teacher.* 35.

Verschaffel, L., De Corte, E., Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85-94.

Vest, F. (1969). Disposition of pre-service elementary teachers related to measurement and partition division. *School Science and Mathemtics, 78*(4), 335-339.

Vergnaud, G.(1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. 127-174. London: Academy Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 141-161. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Weatley, C., Weatley, G. (1984). Problem solving in the primary grades. *Arithmetics Teacher*. April.

Whertheimer, M. (1991). *El pensamiento Productivo*. Barcelona: Paidós.